

# TD de physique des ondes n° 3

# Interfaces entre deux milieux — solution

## 1 — Transmission par une paroi

1. La nature *a priori* complexe du coefficient  $\underline{t}$  traduit l'introduction d'un déphasage dans la pression lors de la traversée de la paroi.

On peut assimiler la paroi à une masse surfacique si son épaisseur est négligeable devant la longueur caractéristique de la propagation de l'onde, c'est-à-dire sa longueur d'onde :  $a \ll \lambda$ .

L'impédance acoustique du milieu pour une onde se propageant dans le sens des  $x$  croissants étant  $Z_0$ , les champs de pression et de vitesse de l'onde incidente sont donnés par :

$$\begin{cases} \underline{p}_i(x, t) = p_{i0} \exp(j(\omega t - kx)) \\ \underline{v}_i(x, t) = \frac{p_{i0}}{Z_0} \exp(j(\omega t - kx)) \end{cases}$$

Lors que cette onde rencontre la paroi, elle donne naissance à une onde réfléchie  $\underline{p}_r(x, t)$  et  $\underline{v}_r(x, t)$  et à une onde transmise  $\underline{p}_t(x, t)$  et  $\underline{v}_t(x, t)$ .

En notant  $\underline{r}$  le coefficient de réflexion, *a priori* complexe, la suppression de l'onde réfléchie vérifie au niveau de la paroi  $\underline{p}_r(0, t) = \underline{r} \underline{p}_i(0, t)$ .

L'impédance acoustique du milieu pour une onde se propageant dans le sens des  $x$  décroissants étant  $-Z_0$ , on a  $\underline{v}_r(x, t) = -\frac{\underline{p}_r(x, t)}{Z_0}$  ; on en déduit les champs de l'onde réfléchie :

$$\begin{cases} \underline{p}_r(x, t) = \underline{r} p_{i0} \exp(j(\omega t + kx)) \\ \underline{v}_r(x, t) = -\underline{r} \frac{p_{i0}}{Z_0} \exp(j(\omega t + kx)) \end{cases}$$

L'impédance acoustique du milieu valant  $Z_0$  pour l'onde transmise, qui se propage dans le sens des  $x$  croissants, on en déduit :

$$\begin{cases} \underline{p}_t(x, t) = \underline{t} p_{i0} \exp(j(\omega t - kx)) \\ \underline{v}_t(x, t) = \underline{t} \frac{p_{i0}}{Z_0} \exp(j(\omega t - kx)) \end{cases}$$

L'onde acoustique est donnée, en  $x < 0$ , par la superposition des ondes incidente et réfléchies, et en  $x > 0$  par l'onde transmise.

On en déduit le champ de pression acoustique.

Pour  $x < 0$  :

$$\underline{p}(x, t) = p_{i0} \exp(j(\omega t - kx)) + \underline{r} p_{i0} \exp(j(\omega t + kx))$$

Pour  $x > 0$  :

$$\underline{t} p_{i0} \exp(j(\omega t - kx))$$

Champ des vitesses.

Pour  $x < 0$  :

$$\underline{v}(x, t) = \frac{p_{i0}}{Z_0} \exp(j(\omega t - kx)) - \underline{r} \frac{p_{i0}}{Z_0} \exp(j(\omega t + kx))$$

Pour  $x > 0$  :

$$\underline{v}(x, t) = \underline{t} \frac{p_{i0}}{Z_0} \exp(j(\omega t - kx))$$

La vitesse normale (qui s'identifie à la vitesse du fluide, l'onde étant longitudinale) du fluide au contact avec la paroi est égale à la vitesse de la paroi ; cette condition, qui s'écrit  $\underline{v}(x = 0, t) = \underline{v}(x = a, t)$  dans le cas général, s'écrit comme une condition de continuité si l'on néglige l'épaisseur de la paroi :

$$\underline{v}(x = 0^-, t) = \underline{v}(x = 0^+, t) \quad \forall t$$

En utilisant l'expression du champ de vitesse, on en déduit

$$\frac{p_{i0}}{Z_0} \exp(j\omega t) - \underline{r} \frac{p_{i0}}{Z_0} \exp(j\omega t) = \underline{t} \frac{p_{i0}}{Z_0} \exp(j\omega t),$$

d'où

$$1 - \underline{r} = \underline{t}$$

Considérons une surface  $S$  de la paroi. Elle est soumise à la pression  $p(x = 0^-, t)$  à gauche, et à la pression  $p(x = 0^+, t)$  à droite ; le principe fondamental de la dynamique appliqué à ce système de masse  $\sigma S$  s'écrit

$$\sigma S \frac{\partial \underline{v}(0, t)}{\partial t} = S \underline{p}(0^-, t) - S \underline{p}(0^+, t),$$

soit

$$\sigma j \omega \frac{t}{Z_0} p_{i0} \exp(j\omega t) = p_{i0} \exp(j\omega t) + \underline{r} p_{i0} \exp(j\omega t) - \underline{t} p_{i0} \exp(j\omega t),$$

d'où :

$$j \frac{\sigma \omega}{Z_0} \underline{t} = 1 + \underline{r} - \underline{t}$$

De l'équation précédente, et avec  $1 - \underline{r} = \underline{t}$ , on déduit

$$2 = \left( 2 + j \frac{\sigma \omega}{Z_0} \right) \underline{t},$$

d'où l'expression du coefficient de transmission en surpression :

$$\underline{t} = \frac{1}{1 + j \frac{\sigma \omega}{2Z_0}}$$

2. L'intensité sonore incidente sur la paroi est donnée par

$$I_i = \langle |p_i(0, t) v_i(0, t)| \rangle = \langle p_i(0, t)^2 \rangle Z_0.$$

La surpression acoustique est donnée par

$$p_i(x, t) = \text{Re}(\underline{p}_i(x, t)) = p_{i0} \cos(\omega t - kx).$$

On en déduit :

$$I_i = \frac{p_{i0}^2}{Z_0} \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{p_{i0}^2}{2Z_0}.$$

L'intensité sonore transmise est donnée par

$$I_t = \frac{|t|^2 p_{i0}^2}{2Z_0}.$$

On en déduit le coefficient de transmission en puissance sonore  $T = \frac{I_t}{I_i} = |t|^2$ , soit

$$T = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 \sigma^2}{4Z_0^2}}.$$

Il est de la forme  $T = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$  avec  $\omega_0 = \frac{2Z_0}{\sigma}$ . On retrouve l'expression du gain d'un **filtre passe-bas** du premier ordre, de pulsation de coupure  $\omega_c$ . La fréquence de coupure  $f_c = \frac{\omega}{2\pi}$  vaut donc  $f_c = \frac{Z_0}{\pi\sigma}$ .

Le gain en décibels en transmission vaut

$$G_{dB} = 10 \log T(\omega) = -10 \log \left( 1 + \frac{\omega^2 \sigma^2}{4Z_0^2} \right).$$

En basse fréquence ( $\omega \ll \frac{2Z_0}{\sigma}$ ), on a  $G_{dB} \approx 0 = G_{dB,BF}$ , soit une asymptote horizontale.

En haute fréquence, ( $\omega \gg \frac{2Z_0}{\sigma}$ ), on a

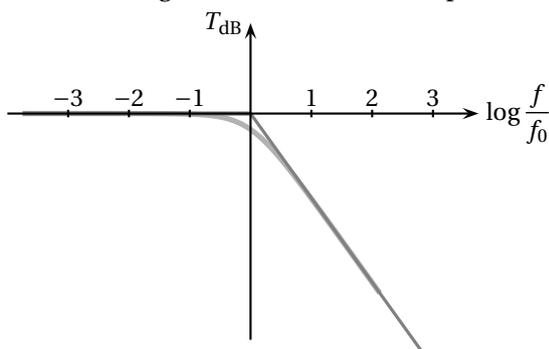
$$G_{dB} \approx -20 \log \left( \frac{\omega\sigma}{2Z_0} \right) = G_{dB,HF},$$

soit une asymptote de pente  $-20$  dB/décade.

Les asymptotes se coupent en  $\omega_0$  tel que  $G_{dB,BF}(\omega_0) = G_{dB,HF}(\omega_0)$ , soit  $0 = -20 \log \left( \frac{\omega_0 \sigma}{2Z_0} \right)$ , donc pour

$$\omega_0 = \frac{2Z_0}{\sigma} = \omega_c.$$

Représentons le diagramme de Bode en amplitude :



3. Le gain en décibel étant donné par

$$G_{dB} = -10 \log \left( 1 + \frac{f^2}{f_c^2} \right).$$

Un affaiblissement de 40 dB se produit à la fréquence  $f$  telle que

$$G_{dB}(f) = -40 = -10 \log \left( 1 + \frac{f^2}{f_c^2} \right),$$

soit  $G_{dB} = -20 \log \left( \frac{f}{f_c} \right) = -40$ , un tel affaiblissement se situant dans le domaine linéaire (pente  $-20$  dB/décade).

Pour  $f = 100$  Hz, on déduit de  $\frac{f}{f_c} = 10^2$  la valeur  $f_c = \frac{f}{100} = 1$  Hz. La fréquence de coupure  $f_c = 1$  Hz est située dans le domaine des infrasons.

La fréquence de coupure est donnée par

$$f_c = \frac{Z_0}{\pi\sigma} = \frac{\mu_{air} c}{\pi\sigma},$$

d'où  $\sigma = \frac{\mu_{air} c}{\pi f_c}$ .

Comme  $\sigma = \mu_0 a$ , on en déduit l'épaisseur du mur :

$$a = \frac{\mu_{air} c}{\pi f_c \mu_0}.$$

Dans le cas d'une paroi en brique, on calcule  $a_{brique} = 14$  cm ; pour une paroi en béton cellulaire, on obtient  $a_{béton} = 31$  cm.

Pour une fréquence  $f = 100$  Hz, la longueur d'onde vaut  $\lambda = \frac{c}{f} = 3,4$  m. Dans les deux cas envisagés, on a bien  $a \ll \lambda$ ; l'hypothèse d'une masse surfacique est validée.

Une paroi se comportant comme un filtre passe-bas, elle filtre d'autant mieux les ondes acoustiques que sa fréquence de coupure est basse, donc que sa masse surfacique est élevée. Elle doit donc être épaisse et construite dans un matériau de masse volumique élevée. Les sons de basse fréquence sont les moins bien atténués par un mur.

## 2 — Discontinuité de section dans un tuyau sonore

1. Résultat établi en cours.

2. Dans le milieu  $x < 0$ , l'onde de surpression est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie, soit

$$p(x, t) = p_i(x, t) + p_r(x, t).$$

Comme  $p_i$  est progressive dans le sens des  $x$  croissants et  $p_r$  dans le sens des  $x$  décroissants, l'onde de vitesse s'écrit

$$v(x, t) = \frac{1}{\mu_0 c} [p_i(x, t) - p_r(x, t)].$$

Dans le milieu  $x > 0$ , on a

$$p(x, t) = p_t(x, t) \quad \text{et} \quad v(x, t) = v_t(x, t).$$

La continuité de la surpression à l'interface s'écrit

$$p_i(0, t) + p_r(0, t) = p_t(0, t).$$

La continuité du débit volumique donne

$$S_1 [p_i(0, t) - p_r(0, t)] = S_2 p_t(0, t).$$

Le coefficient de réflexion en amplitude de surpression est défini par

$$r = \frac{p_r(0, t)}{p_i(0, t)}.$$

En éliminant  $p_t(0, t)$  des relations de passage, on obtient

$$p_i(0, t)[S_1 - S_2] = p_r(0, t)[S_1 + S_2].$$

On a donc

$$r = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2}$$

soit comme  $S = \pi D^2/4$  :

$$r = \frac{1 - \chi^2}{1 + \chi^2}.$$

En éliminant  $p_r(0, t)$  des relations de passage, on obtient

$$2p_i(0, t) = \left(1 + \frac{S_2}{S_1}\right) p_t(0, t).$$

Le coefficient de transmission en amplitude de surpression est défini par

$$t = \frac{p_t(0, t)}{p_i(0, t)}.$$

On a donc

$$t = \frac{2S_1}{S_1 + S_2},$$

soit

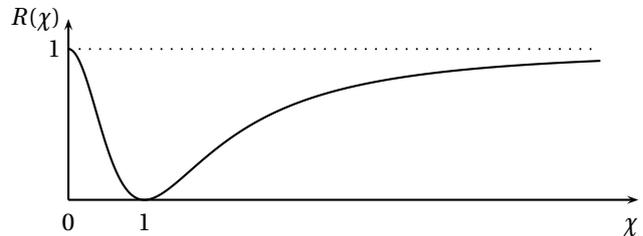
$$t = \frac{2}{1 + \chi^2}.$$

3. Les coefficients en intensité sonores sont alors

$$R = \left(\frac{1 - \chi^2}{1 + \chi^2}\right)^2 \quad \text{et} \quad T = \left(\frac{2}{1 + \chi^2}\right)^2.$$

4. On a  $R(\chi) = 0$  pour  $\chi = 1$ . De plus

$$\lim_{\chi \rightarrow \infty} R(\chi) = R(0) = 1.$$



Le cas  $\chi = 1$  correspond à  $S_1 = S_2$  : il n'y a pas de discontinuité ; on n'a qu'un unique tuyau et il n'y a pas d'onde réfléchie.

5. Le cas  $\chi \rightarrow 0$  correspond à  $S_2 \rightarrow 0$ . Le tuyau (1) est donc fermé en  $x = 0$ .

Le champ des vitesses est donc nul en  $x = 0$  (condition sur une paroi) ; on a donc  $r_v = -1$ , et le coefficient de réflexion en surpression vaut  $r = +1$ . Dans le cas d'ondes harmoniques, on a alors un nœud de vitesse et un ventre de pression à une extrémité fermée d'un tuyau.

Le cas  $\chi \rightarrow \infty$  correspond à  $S_2 \rightarrow \infty$ . Le tuyau (1) est donc ouvert en  $x = 0$ .

On a alors  $r = -1$  et pour les vitesses  $r_v = +1$ . La surpression est donc nulle en  $x = 0$ . Dans le cas d'ondes harmoniques, on a alors un nœud de surpression et un ventre de vitesse à une extrémité ouverte d'un tuyau.

### 6. Tuyau pair

Pour un tuyau ouvert-ouvert, on a un nœud de surpression à chaque extrémité. Le fondamental présente donc un « fuseau » pour l'onde de surpression, d'où  $L = \lambda/2$ .

Pour un tuyau fermé-fermé, on a un nœud de vitesse à chaque extrémité. Le fondamental présente donc un « fuseau » pour l'onde de vitesse, d'où  $L = \lambda/2$ .

La fréquence du fondamental  $f = c/\lambda$  vaut alors

$$f_{\text{pair}} = \frac{c}{2L}.$$

### Tuyau impair

Pour un tuyau ouvert-fermé, on a un demi-fuseau pour l'onde de surpression (un ventre à une extrémité, un nœud à l'autre), d'où  $L = \lambda/4$ .

La fréquence du fondamental vaut alors

$$f_{\text{impair}} = \frac{c}{4L}.$$

7. On calcule  $L = c/(2f)$ , soit  $L = 52$  cm, ordre de grandeur réaliste!

La clarinette est un instrument de type « impair ». D'après la question précédente, on a pour une même longueur

$$f_{\text{impair}} = \frac{f_{\text{pair}}}{2}.$$

À longueur égale, la clarinette joue donc plus bas que la flûte (une octave plus bas).

Pour le tuyau d'orgue, on calcule

$$\frac{c}{fL} = \frac{340}{16 \times 10,6} = 2.$$

Ce tuyau est pair (ouvert aux deux extrémités en l'occurrence).

8. Pour un tuyau pair, on a  $L = n \frac{\lambda_n}{2}$ , d'où

$$f_{\text{pair},n} = \frac{c}{\lambda_n} = n \frac{c}{2L} = n f_{\text{pair},1}.$$

Pour un tuyau impair, on a  $L = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda_n}{2}$ , d'où

$$f_{\text{impair},n} = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{2n+1}{2} \frac{c}{2L} = (2n+1) \frac{c}{4L} = (2n+1) f_{\text{impair},1}.$$

Dans le cas du tuyau impair, seuls les harmoniques de rang impair son présents.

Pour un tuyau pair, l'écart entre deux harmoniques successifs est

$$\Delta f = f_{n+1} - f_n = \frac{c}{2L}.$$

Pour un tuyau impair, il vaut

$$\Delta f = f_{n+1} - f_n = \frac{c}{2L}.$$

Il ne dépend pas de la parité du tuyau.

### 3 — Couche anti-reflet en échographie

1. On calcule

$$T = \frac{4Z_a Z_m}{(Z_a + Z_m)^2} = 1,8 \times 10^{-3}.$$

Moins de 0,2 % de la puissance sonore est transmise à l'interface air-muscle. On peut réaliser une échographie si une couche d'air s'est immiscée entre la sonde et la peau.

2. Dans le milieu  $x > e$ , on propose une onde progressive dans le sens des  $x$  croissants : c'est l'onde transmise après la traversée de la couche de graisse.

Dans le milieu  $x < 0$ , on propose une onde progressive dans le sens des  $x$  croissants : on se place dans le cas

où il n'y a pas d'onde réfléchi (principe de la couche anti-reflet).

Dans la couche de graisse, on a une onde progressive dans le sens des  $x$  croissants (issue de la transmission de l'onde incidente), et une onde progressive dans le sens des  $x$  décroissants (issue de la réflexion sur l'interface  $x = e$ ).

3. Le champ de surpression est donné par

$$\begin{aligned} p(x < 0) &= Z_a A_a e^{j(\omega t - k_a x)} \\ p(x > e) &= Z_m A_m e^{j(\omega t - k_m x)} \\ \underline{v}(0 < x < e) &= Z_g \left( A_g e^{j(\omega t - k_g x)} - B_g e^{j(\omega t + k_g x)} \right) \end{aligned}$$

4. Les relations de passage à l'interface  $x = 0$  s'écrivent après simplification par  $e^{j\omega t}$  :

$$A_a = A_g + B_g \tag{1}$$

et

$$Z_a A_a = Z_g [A_g - B_g]. \tag{2}$$

À l'interface  $x = e$ , on obtient de même

$$A_m e^{-jk_m e} = A_g e^{-jk_g e} + B_g e^{jk_g e} \tag{3}$$

et

$$Z_m A_m e^{-jk_m e} = Z_g [A_g e^{-jk_g e} - B_g e^{jk_g e}] \tag{4}$$

En formant (2)/(1) on obtient

$$Z_a = Z_g \frac{A_g - B_g}{A_g + B_g}$$

d'où

$$(Z_a + Z_g) B_g = (Z_g - Z_a) A_g. \tag{5}$$

En formant (4)/(3) on obtient

$$Z_m = Z_g \frac{A_g e^{-jk_g e} - B_g e^{jk_g e}}{A_g e^{-jk_g e} + B_g e^{jk_g e}}$$

soit

$$Z_m = Z_g \frac{A_g - B_g e^{2jk_g e}}{A_g + B_g e^{2jk_g e}}.$$

Avec (5) on obtient

$$Z_m = Z_g \frac{1 - \frac{Z_g - Z_a}{Z_g + Z_a} e^{2jk_g e}}{1 - \frac{Z_g + Z_a}{Z_g - Z_a} e^{2jk_g e}} = Z_g \frac{(Z_g + Z_a) - (Z_g - Z_a) e^{2jk_g e}}{(Z_g + Z_a) + (Z_g - Z_a) e^{2jk_g e}}$$

soit

$$\begin{aligned} Z_m &\left[ (Z_g + Z_a) + (Z_g - Z_a) e^{2jk_g e} \right] \\ &= Z_g \left[ (Z_g + Z_a) - (Z_g - Z_a) e^{2jk_g e} \right]. \end{aligned}$$

On factorise

$$(Z_g - Z_a)(Z_m + Z_g) e^{2jk_g e} = (Z_g - Z_m)(Z_g + Z_a) e^{2jk_g e}$$

d'où

$$e^{2jk_g e} = \frac{(Z_g - Z_m)(Z_g + Z_a)}{(Z_g - Z_a)(Z_g + Z_m)}.$$

L'égalité des parties imaginaires de l'équation précédente donne

$$\sin(2k_g e) = 0$$

d'où  $2k_g e = n\pi$ .

On a alors  $\cos(2k_g e) = \pm 1$ .

La solution  $\cos(2k_g e) = 1$  conduit à

$$\frac{Z_g - Z_a}{Z_g + Z_a} = \frac{Z_g - Z_m}{Z_g + Z_m}$$

d'où  $Z_a = Z_m$  ce qui est impossible (on a justement  $Z_a \neq Z_m$ ).

Il faut donc  $\cos(2k_g e) = -1$ , d'où

$$2k_g e = (2n + 1)\pi.$$

Les valeurs possibles de l'épaisseur sont donc

$$e_g = (2n + 1) \frac{\pi}{2k_g} = (2n + 1) \frac{\lambda_g}{4}$$

où  $\lambda_g = 2\pi/k_g$  est la longueur d'onde dans la graisse.

On a alors

$$\frac{(Z_g - Z_m)(Z_g + Z_a)}{(Z_g - Z_a)(Z_g + Z_m)} = -1$$

soit

$$(Z_g - Z_m)(Z_g - Z_a) = (Z_a - Z_g)(Z_g + Z_m).$$

En développant et après simplification, on trouve

$$Z_g = \sqrt{Z_a Z_m}.$$

On calcule  $Z_g = 2,6 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

5. La puissance moyenne incidente dans l'air est

$$\langle \Pi_a \rangle = \frac{Z_a A_a^2}{2}.$$

La puissance transmise dans le muscle est

$$\langle \Pi_m \rangle = \frac{Z_m A_m^2}{2}.$$

D'après l'équation (3) on a

$$A_m = A_g + B_g e^{2jk_g e} = A_g - B_g$$

compte tenu de la relation sur  $e$ .

L'équation (2) permet alors d'écrire

$$A_m = \frac{Z_a}{Z_g} A_a.$$

On a donc

$$\langle \Pi_m \rangle = Z_m \frac{Z_a^2}{Z_g^2} \frac{A_a^2}{2} = Z_m \frac{Z_a^2}{Z_a Z_m} \frac{A_a^2}{2} = \frac{Z_a A_a^2}{2} = \langle \Pi_a \rangle.$$

La puissance incidente dans l'air est intégralement transmise dans le muscle.