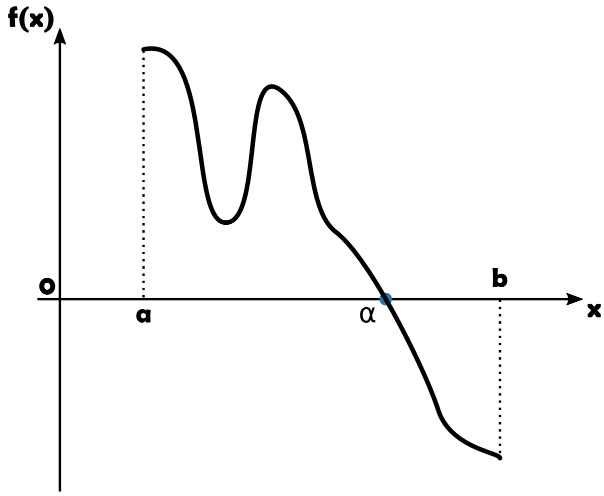
Centre d'intérêt 6

Résolution d'une équation $f(x) = 0$

PSI - MP : Lycée Rabelais

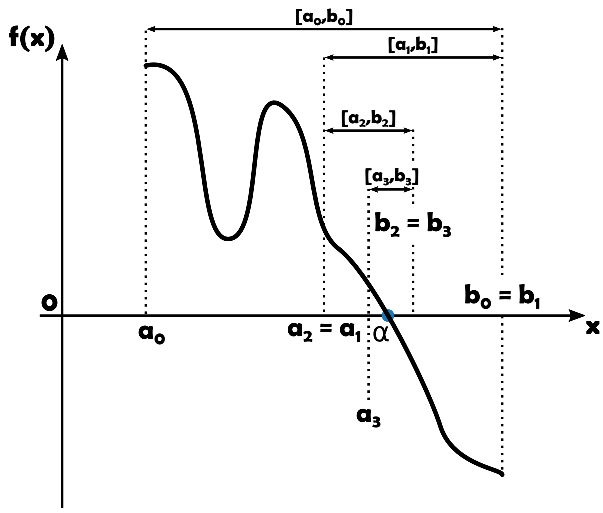
On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$. On cherche $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Cette solution existe si $f(a) \times f(b) < 0$. Les méthodes pour approcher la valeur de α consistent à construire une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} x_n = \alpha$.



On fixe usuellement une tolérance ε (valeur fixée). On peut utiliser plusieurs critères d'arrêt :

- Critère absolu : $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$
- Critère relatif : $\left|\dfrac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}\right| < \varepsilon$
- Critère résiduel : $|f(x_n)| < \varepsilon$

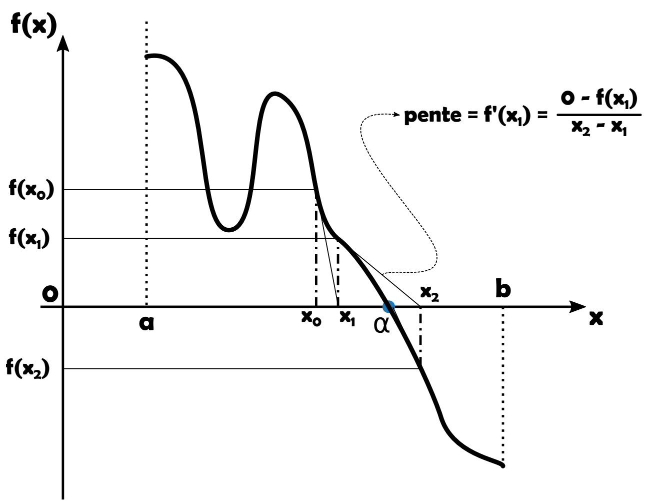
1 Méthode de dichotomie



Les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

1. Calculer le point milieu m de l'intervalle $[a, b]$.
2. Évaluer le signe de $f(a) \times f(m)$.
3. En déduire le sous-intervalle $[a, m]$ ou $[m, b]$ dans lequel chercher la solution.
4. Repartir à l'étape **1** tant que le critère d'arrêt n'est pas vérifié.

2 Méthode de Newton



Pour cette méthode, la fonction f doit être dérivable sur l'intervalle $[a, b]$.

Pour résoudre l'équation $f(\alpha) = 0$, il faut suivre les étapes suivantes :

1. Calculer une valeur $x_0 \in [a, b]$.
2. Construire la valeur suivante $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n}{f'(x_n)}$.
3. Repartir à l'étape **2** tant que le critère d'arrêt n'est pas vérifié.

Pour retrouver la relation de récurrence, il faut écrire la pente $f'(x_i)$ en un point $(x_i, f(x_i))$.

Exercice d'application

On considère la fonction $f(x) = \sin(\sin(x)) - \sin(\sin(2x))$. On veut trouver les solutions $\alpha \in [0, \pi]$ de l'équation $f(\alpha) = 0$.

Question 1. Définir la fonction `f`.

Question 2. Tracer la courbe représentative de la fonction sur l'intervalle souhaité en utilisant le script ci-dessous :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return ................

Lx = np.linspace(...................)
Lf = f(Lx) ## fonctionne car tableaux numpy !

plt.plot(Lx,Lf)
```

Question 3. Postuler sur les solutions à trouver.

Question 4. Déterminer la solution $\alpha \in]a, b[$ par la méthode de dichotomie

Question 5. Calculer puis définir la fonction `fprim(x)` qui renvoie la dérivée de la fonction f.

Question 6. En déduire la solution $\alpha \in]a, b[$ par la méthode de Newton.