

# Intégration numérique

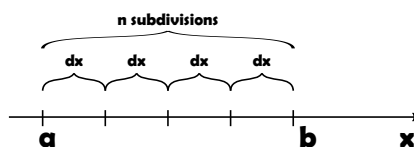
PSI - MP : Lycée Rabelais

On cherche à intégrer numériquement une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$ . Cela revient donc à calculer l'aire sous la courbe représentant la fonction. On cherche donc  $I$  telle que :

$$I = \int_a^b f(x).dx$$

Il existe plusieurs méthodes d'approximation. On notera dans la suite  $n$ , le nombre de subdivision de l'intervalle  $[a, b]$  et  $dx$  le "petit" segment résultant de cette subdivision. On a donc :

$$dx = \frac{b-a}{n}$$

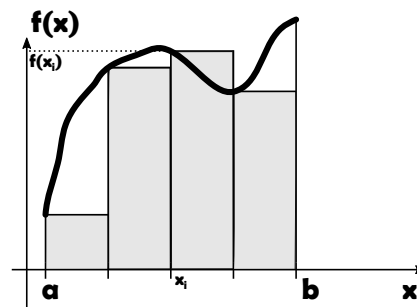


## 1 Méthode des rectangles

### 1.1 Méthode des rectangles "à gauche" ou "arrière"

Elle revient à réaliser l'approximation suivante :

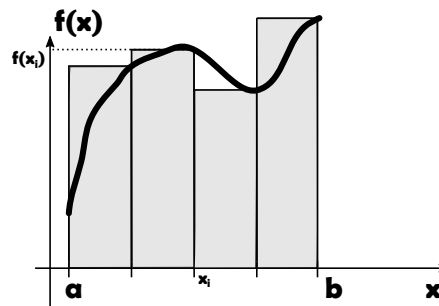
$$I \approx I_g \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).dx \quad \text{avec } x_i = a + i.dx$$



### 1.2 Méthode des rectangles "à droite" ou "avant"

Elle revient à réaliser l'approximation suivante :

$$I \approx I_d \approx \sum_{i=1}^n f(x_i).dx \quad \text{avec } x_i = a + i.dx$$

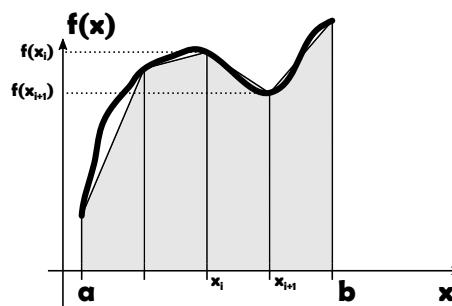


## 2 Méthode des trapèzes

Dans cette approximation, on a :

$$I \approx I_t \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot dx \quad \text{avec } x_i = a + i.dx$$

On pourra remarquer que  $I_t = \frac{I_g + I_d}{2}$



## Exercice d'application

On définit la fonction  $f$  telle que :  $f(x) = (\cos(x))^x$ . On veut calculer l'intégrale  $I$  telle que :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x).dx$$

**Question 1.** Définir la fonction  $f(x)$ .

**Question 2.** Représenter cette fonction pour sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . On pourra s'aider des instructions ci-dessous :

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 a = 0
5 b = np.pi/2
6 n = 100 ## nombre de subdivisions
7
8 def f(x):
9     ....
10
11 lx = [i*dx for i in range(0, ..... )] ## lx est la liste des xi
12
13 lf = [..... for xi in lx]
14
15 plt.plot(..... , .....)
```

**Question 3.** Calculer l'intégrale  $I$  par :

- la méthode des rectangles "arrières" ;
- la méthode des rectangles "avants" ;
- la méthode des trapèzes.

On pourra s'aider des instructions suivantes :

```
1 Ig = 0
2
3 for i in range(.....):
4     ....
5 print('Ig =', Ig)
```