

Centrale-Supélec 2015, filière PSI, épreuve de Physique-Chimie I

Corrigé proposé par JPh Caniparoli ; pour me contacter (erreurs, ...) : artefact.act@wanadoo.fr

le projet Hyperloop

I l'air dans le tube

I.A - Modélisation du fonctionnement d'une pompe à palette

I.A.1)

a) La loi du gaz parfait pour un système fermé en évolution isotherme s'écrit $pV = nRT = cste$. On considère le système formé par le gaz contenu dans le réservoir et la partie de la pompe en contact avec le réservoir :

- au début de la phase d'aspiration, le volume de la pompe communiquant avec le réservoir est nul, donc le gaz occupe le volume V_0 à la pression P_0 ;
- à la fin de la phase d'aspiration, le volume de la pompe communiquant avec le réservoir est V_b , donc le gaz occupe le volume $V_0 + V_b$, à la pression P_1 ;
- la communication entre le réservoir et la pompe est alors coupée, le réservoir reste à la pression P_1 .

La loi du gaz parfait conduit alors à la relation $P_0V_0 = P_1(V_0 + V_b)$, soit

$$P_1 = \frac{V_0}{V_0 + V_b} P_0 < P_0$$

b) Pour les cycles suivants le raisonnement est identique, en considérant à chaque cycle les pressions initiale et finale dans le réservoir.

$$P_2 = \frac{V_0}{V_0 + V_b} P_1 = \left(\frac{V_0}{V_0 + V_b} \right)^2 P_0$$
$$P_k = \frac{V_0}{V_0 + V_b} P_{k-1} = \left(\frac{V_0}{V_0 + V_b} \right)^k P_0$$

c) Les pressions successives forment une suite géométrique de raison $r = V_0/(V_0 + V_b) < 1$, de limite nulle, donc la pression minimale théorique est nulle

$$P_{\min} = 0$$

d) À chaque cycle la pompe aspire le volume V_b de gaz à la pression (en fin de cycle) du réservoir, donc comme il y a ν cycle par unité de temps, le débit volumique de la pompe a pour expression

$$D = \nu V_b$$

Un calcul plus rigoureux peut être fait :

Si la pression du réservoir est P , la pression en fin d'aspiration vaut comme calculé précédemment $P' = PV_0/(V_0 + V_b)$, soit un nombre de moles dans le volume V_b

$$n = \frac{P'V_b}{RT}$$

qui ramené à la pression P correspond à un volume

$$V'_b = \frac{nRT}{P} = \frac{P'}{P} V_b = \frac{V_0}{V_0 + V_b} V_b$$

On retrouve le résultat précédent $V'_b = V_b$ dans l'hypothèse réaliste (mais qui aurait pu être précisée dans l'énoncé) $V_0 \gg V_b$, ce qui correspond à une variation relative de pression faible à chaque cycle.

I.A.2)

a) D'après la modélisation précédente, D est indépendant de la pression dans le réservoir, ce qui se traduit dans le diagramme $D = f(P)$ par une horizontale. Ceci est vérifié dans le cas de la pompe étudiée pour

$$P \gtrsim 2 \text{ mbar}$$

Comme suggéré dans la suite de l'étude, la diminution du débit volumique peut s'expliquer par des fuites entre les compartiments de la pompe délimités par les palettes, dont les pressions sont différentes et vont en croissant du réservoir à l'extérieur. La tendance à l'uniformisation des pressions conduit à un flux de gaz de l'extérieur vers le réservoir en présence de défauts d'étanchéité entre les palettes et le corps de la pompe.

On peut également penser d'après le quatrième schéma de la figure 1 à des défauts d'étanchéité entre le rotor et le stator de la pompe dans la phase de fonctionnement où aucune palette n'est présente dans la partie haute de la pompe : il peut y avoir alors des fuites directes entre l'extérieur et le réservoir.

Enfin, même si le volume mort entre la pompe et la soupape ne pose théoriquement pas de problème, la présence de frottements solides peut empêcher l'ouverture de la soupape si la pression dans le compartiment mis en contact avec le volume mort devient trop faible : à la fin du refoulement le volume mort V_m est à la pression P_0 . Au début de la compression suivante, il est mis en contact avec le compartiment de la pompe de volume V_b à la pression P_r du réservoir. Tant que la soupape ne s'ouvre pas elle délimite avec la palette le volume de gaz subissant la compression, de volume $V > V_m$, dont la pression vérifie d'après la loi du gaz parfait

$$P = \frac{P_0 V_m + P_r V_b}{V} < P_0 + P_r \frac{V_b}{V_m}$$

donc si la pression dans le réservoir devient faible, la pression en amont de la soupape excède de très peu P_0 , et la soupape peut ne pas s'ouvrir.

b) Si la pression du réservoir est P , en l'absence de fuite la pompe aspire un volume équivalent V_b à la pression P , mais un volume V_f est réintroduit à la pression P_0 : la variation du nombre de moles dans le réservoir est donc

$$\Delta n = \frac{-PV_b + P_0V_f}{RT}$$

- si la pression dans le réservoir est suffisante : $P \gg P_0 \frac{V_f}{V_b}$, l'influence de la fuite est négligeable, donc on retrouve un débit constant, correspondant à l'asymptote horizontale
- si la pression dans le réservoir tend vers la valeur $P_0 \frac{V_f}{V_b}$, la quantité de gaz aspiré est compensée par la fuite, le débit est nul, et on retrouve dans le diagramme en échelle logarithmique proposé l'asymptote verticale.

On peut calculer l'expression (non demandée) du débit volumique dans ce modèle, en reportant la variation du nombre de moles dans le réservoir à un volume à la pression P et la température T :

$$V'_b = V_b - V_f \frac{P_0}{P}$$

soit un débit volumique réel

$$D' = \nu V'_b = \nu \left(V_b - V_f \frac{P_0}{P} \right) = D \left(1 - \frac{P_0 V_f}{P V_b} \right)$$

c) D'après la question précédente, la pression minimale correspond à l'annulation du débit volumique

$$P'_{\min} = P_0 \frac{V_f}{V_b}$$

d) voir le point (a) qui me semble faire double emploi : interpréter qualitativement le graphique n'est ce pas déjà proposer des explications des processus conduisant au graphique réel ?

e) Oui d'après (b)

I.B - Faire le vide

I.B.1)

Le domaine de pression dans lequel doit travailler la pompe est situé sur l'asymptote horizontale de la caractéristique de la pompe (l'écart lorsque la pression minimale est atteinte reste faible), ce qui correspond à la première modélisation envisagée.

Les pompes travaillant en parallèle les débits volumiques s'ajoutent, et dans le modèle simplifié

$$D_t = ND = N\nu V_b$$

I.B.2)

D'après la question I.1, au bout de k cycles, et pour N pompes travaillant en parallèle sur la conduite de volume V

$$P_k = P_0 \left(\frac{V}{V + NV_b} \right)^k$$

or le nombre de cycles effectués sur la durée Δt a pour expression $k = \nu \Delta t$

$$P(\Delta t) = P_0 \left(\frac{V}{V + NV_b} \right)^{\nu \Delta t}$$

en passant aux logarithmes, en notant $P(\Delta t) = P$

$$\ln \left(\frac{P}{P_0} \right) = \ln \left(\frac{V}{V + NV_b} \right)^{\nu \Delta t}$$

Dans l'approximation $NV_b \ll V$, on peut alors écrire

$$\ln \left(\frac{P}{P_0} \right) = -\ln \left(\frac{V + NV_b}{V} \right)^{\nu \Delta t} = -\ln \left(1 + \frac{NV_b}{V} \right)^{\nu \Delta t} \approx -\left(\frac{NV_b}{V} \right)^{\nu \Delta t}$$

et finalement

$$\Delta t = \frac{\ln \left(\frac{P_0}{P} \right)}{\nu \frac{NV_b}{V}} = \ln \left(\frac{P_0}{P} \right) \frac{V}{D_t}$$

Remarque : il faut faire attention à passer aux logarithmes avant de faire le développement limité. La forme approchée obtenue en écrivant

$$P = P_0 \left(\frac{V}{V + NV_b} \right)^{\nu \Delta t} = P_0 \left(1 + \frac{NV_b}{V} \right)^{-\nu \Delta t} \approx P_0 \left(1 - \frac{NV_b \nu \Delta t}{V} \right) = P_0 \left(1 - \frac{D_t \Delta t}{V} \right)$$

n'est valable que pour

$$\frac{D_t \Delta t}{V} \ll 1$$

ce qui correspond à $P \approx P_0$, hypothèse qui n'est pas vérifiée ici ($P = 2 \text{ mbar} \ll P_0 = 1 \text{ bar}$).

I.B.3)

Applications numériques

$$V = L \times \pi \frac{d^2}{4} = 2,34 \times 10^6 \text{ m}^3 ; N = 300$$

On lit sur la caractéristique, pour l'asymptote horizontale $D \approx 250 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$, soit

$$D_t = ND = 7,5 \times 10^4 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$$

puis, en conservant les heures comme unité de temps

$$\Delta t = 194 \text{ h}$$

I.C - Déplacer l'air restant

I.C.1)

a) D'après le résultat de cours, pour un écoulement stationnaire entre un point A et un point B , on peut écrire les deux relations équivalentes

$$\left[h + \frac{v^2}{2} + e_p \right]_A^B = w_u + q ; D_m \left[h + \frac{v^2}{2} + e_p \right]_A^B = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$

où

- h représente l'enthalpie massique du fluide ;
- v sa vitesse, $v^2/2$ son énergie cinétique massique ;
- e_p son énergie interne massique ;
- \int_A^B la variation des grandeurs entre le point A et la point B , calculée dans l'hypothèse d'un écoulement uniforme sur chaque section droite considérée ;
- w_u le travail massique utile (hors travail des forces de pression exercées par le fluide amont et aval) reçu par le fluide entre A et B ;
- q le transfert thermique massique reçu par le fluide entre A et B ;
- D_m le débit massique du fluide s'écoulant entre A et B , identique en A et B pour un écoulement stationnaire sans dérivation ;
- $\mathcal{P}_u = D_m w_u$ la puissance mécanique utile reçue par le fluide entre A et B ;
- $\mathcal{P}_{th} = D_m q$ la puissance thermique reçue par le fluide entre A et B .

b)

- on néglige les variations d'énergies cinétique et potentielle, donc seule l'enthalpie du fluide varie ;
- la transformation est adiabatique, donc $q = 0$ et $\mathcal{P}_{th} = 0$;
- elle est de plus réversible donc isentropique, ce qui n'influence pas l'expression initiale du premier principe.

On peut donc écrire en notant h_e et h_s les enthalpies massiques de l'air à l'entrée et à la sortie du compresseur

$$h_s - h_e = w_u ; D_m(h_s - h_e) = \mathcal{P}_u$$

I.C.2)

L'air est assimilé au gaz parfait : $PV = nRT$, soit

$$PV = \frac{m}{\mathcal{M}_{\text{air}}} RT ; P = \frac{m}{V} \frac{RT}{\mathcal{M}_{\text{air}}} = \rho_{\text{air}} \frac{RT}{\mathcal{M}_{\text{air}}}$$

$$\rho_{\text{air}} = \frac{P \mathcal{M}_{\text{air}}}{RT} = 1,19 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}$$

I.C.3)

L'air est assimilé au gaz parfait, donc d'après la seconde loi de Joule

$$\Delta h = c_{pm} \Delta T$$

où c_{pm} est la capacité thermique massique de l'air.

I.C.4)

L'énoncé n'est pas clair sur la formation d'une zone de pression en avant de la capsule, qui entraîne la formation d'une zone perturbée en avant de la capsule.

Qualitativement, dans cette zone :

- la pression, la température, et donc la masse volumique sont plus élevées que dans le reste de la conduite ;
- le fluide n'est pas au repos par rapport au référentiel de la conduite ;
- les lignes de courant dans le référentiel lié à la capsule ne sont plus parallèles : en particulier elles se resserrent à l'entrée du compresseur.

Cependant, en l'absence d'information supplémentaire sur cette zone, on ne peut que prendre les données de l'énoncé, en considérant que l'air en amont de la capsule n'est pas perturbé par l'arrivée de la capsule.

Dans le référentiel lié à la capsule, l'air s'écoule alors vers la capsule à une vitesse v uniforme opposée à la vitesse de déplacement de la capsule par rapport à la conduite, selon des lignes de courants parallèles, et a pour masse volumique ρ . Si S est la section d'entrée du compresseur

$$D_m = \rho S v$$

a)

$$D_m = \rho \pi R^2 v = 1,19 \times 10^{-3} \times \pi \times 0,63^2 \times \frac{1200 \times 10^3}{3600} = 0,495 \text{ kg s}^{-1}$$

I.C.5)

On reprend l'expression du premier principe

$$D_m (h_s - h_e) = \mathcal{P}_u$$

puis on exprime la variation d'enthalpie massique en fonction de la variation de température

$$D_m c_{pm} (T_{cs} - T) = \mathcal{P}_u$$

I.C.6)

La relation précédente permet d'exprimer T_{cs}

$$T_{cs} = T + \frac{\mathcal{P}_u}{D_m c_{pm}}$$

soit, avec $T = 292 \text{ K}$, $\mathcal{P}_u = 328 \text{ kW}$, $c_{pm} = 10^3 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ et $D_m = 0,495 \text{ kg s}^{-1}$

$$T_{cs} = 955 \text{ K}$$

I.C.7)

La transformation de l'air dans le compresseur est isentropique, donc d'après le second principe appliqué à l'écoulement stationnaire dans le compresseur

$$s_s - s_e = 0 ; s_s = s_e$$

L'air étant assimilé au gaz parfait, les lois de Laplace et du gaz parfait s'appliquent

$$PV^\gamma = cste ; \frac{PV}{T} = cste' : P^{1-\gamma} T^\gamma = cste ; \left(\frac{P_{cs}}{P}\right)^{1-\gamma} \left(\frac{T_{cs}}{T}\right)^\gamma = 1$$

soit

$$P_{cs} = \left(\frac{T_{cs}}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} P = 6,33 \text{ kPa} = 63,3 \text{ mbar}$$

I.C.8)

a) Le premier principe d'écrit pour chacun des fluides en écoulement stationnaire, en l'absence de variations d'énergies cinétique et potentielle, et de travail utile (pas de pièce mobile)

$$h_{as} - h_{ae} = q_{\rightarrow air} ; h_{es} - h_{ee} = q_{\rightarrow eau}$$

b) L'air ne subit pas de changement d'état

$$h_{as} - h_{ae} = c_{pm}(T_{as} - T_{ae})$$

L'eau subit un échauffement de T_{ee} à T_{es} , correspondant à la température de vaporisation sous $P = 1$ bar, puis une vaporisation partielle, isobare à T_{es} , d'une fraction x

$$h_{es} - h_{ee} = c_{em}(T_{es} - T_{ee}) + xl_e$$

c) On déduit alors du premier principe les transferts thermiques massiques

$$q_{\rightarrow air} = c_{pm}(T_{as} - T_{ae}) ; q_{\rightarrow eau} = c_{em}(T_{es} - T_{ee}) + xl_e$$

I.C.9)

On passe aux puissances en multipliant par les débits massiques respectifs

$$\mathcal{P}_{\rightarrow air} = D_m c_{pm}(T_{as} - T_{ae}) ; \mathcal{P}_{\rightarrow eau} = D_e (c_{em}(T_{es} - T_{ee}) + xl_e)$$

I.C.10)

L'échangeur étant calorifugé, l'eau et l'air ne reçoivent aucun autre transfert thermique que ceux calculé ci-dessus : les puissances thermiques reçues par l'eau et l'air sont opposées

$$\mathcal{P}_{\rightarrow air} = \mathcal{P}_{eau \rightarrow air} - \mathcal{P}_{\rightarrow eau}$$

On en déduit la relation

$$D_m c_{pm}(T_{as} - T_{ae}) = -D_e (c_{em}(T_{es} - T_{ee}) + xl_e)$$

puis l'expression de la température de sortie de l'air, avec la température d'entrée de l'air T_{ae} égale à sa température de sortie du compresseur T_{cs}

$$T_{as} = T_{cs} - \frac{D_e (c_{em}(T_{es} - T_{ee}) + xl_e)}{D_m c_{pm}} = 300 \text{ K}$$

L'échangeur permet de maintenir l'air dans le tunnel à une température approximativement constante.

II l'alimentation électrique du compresseur

II.A - le choix du lithium

II.A.1)

${}^7_3\text{Li}$ est composé :

- d'un nuage électronique de $Z = 3$ électrons ;
- d'un noyau atomique formé de $A = 7$ nucléons : $Z = 3$ protons et $A - Z = 4$ neutrons.

II.A.2)

Configuration électronique ($Z = 3$) :

$$1s^2 2s^1$$

II.A.3)

- $N = 2$: le lithium se situe sur la seconde ligne du tableau périodique ;
 - Ns^1 : le lithium se situe sur la première colonne du tableau périodique.
- Il s'agit donc d'un alcalin.

II.A.4)

L'électronégativité croît de la gauche vers la droite du tableau périodique, donc le lithium est peu électronégatif.

II.A.5)

Li, de structure électronique $1s^2 2s^1$ peut prendre facilement la structure du gaz rare précédent (l'hélium) en perdant un électron selon



ce qui justifie son caractère réducteur.

II.A.6)

La maille élémentaire du lithium comporte :

- un atome à chacun des 8 sommets de la maille, partagé entre 8 mailles voisines, soit $8 \times 1/8 = 1$ atome en propre ;
- un atome au centre de la maille appartenant en propre à la maille.

Soit au total 2 atomes par maille.

L'atome au centre de la maille a pour plus proches voisins les 8 atomes situés à chacun des sommets de la maille, et un atome à l'un des sommets de la maille a pour plus proches voisins les atomes occupant les centres des 8 mailles entre lesquelles il est partagé, soit une coordination de 8

$$C = 8$$

Les atomes plus proches voisins sont tangents, donc le rayon atomique R vérifie en considérant les atomes situés sur une grande diagonale de la maille

$$4R = \ell = \sqrt{3}a ; R = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

Le volume occupé par les deux atomes contenus en propre dans la maille a pour expression

$$V_a = 2 \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{8\pi}{3} \frac{3\sqrt{3}}{4 \times 16} a^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{8} a^3$$

Le volume total de la maille vaut $V_m = a^3$, donc la compacité vaut

$$C = \frac{V_a}{V_m} = \frac{\sqrt{3}\pi}{8} = 0,68 = 68\%$$

Il ne s'agit pas d'une structure compacte

II.A.7)

La maille élémentaire de volume a^3 contient 2 atomes

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{2M(\text{Li})/N_a}{a^3} = \frac{2M(\text{Li})}{N_a a^3} = 540 \text{ kg m}^{-3}$$

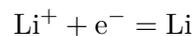
II.A.8)

D'après ce qui précède l'intérêt du lithium provient de son pouvoir réducteur élevé (potentiel standard faible), et de sa masse molaire faible pour un solide : il peut donc être utilisé dans des réactions électrochimiques de tension associée élevée avec une masse nécessaire pour un nombre d'électrons mis en jeu identique plus faible que dans le cas d'autres composés : on obtient ainsi une énergie massique élevée.

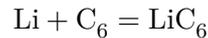
II.B - Accumulateur Li-ion

II.B.1) l'électrode négative

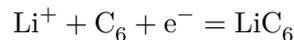
a) réduction de Li^+



insertion



demi-réaction bilan de la charge (combinaison des deux réactions précédentes)



b) D'après la stoechiométrie de la réaction d'insertion (un atome de lithium pour 6 atomes de carbone)

$$N_{\max} = \frac{1}{6M(\text{C})} = 1,39 \times 10^{-2} \text{ mol g}^{-1}$$

chaque mole de lithium peut libérer une mole d'électron de charge $N_A|q_e|$, d'où la capacité de l'électrode de graphite lithié

$$q_{\max} = N_A|q_e|N_{\max} = 1,34 \times 10^3 \text{ C g}^{-1}$$

$$q_{\max} = 1,34 \times 10^3 \text{ A s g}^{-1} = 1,34 \times 10^3 \times 1000 \text{ mA} \times \frac{1}{3600} \text{ h g}^{-1} = 372 \text{ mA h g}^{-1}$$

II.B.2) l'électrode positive

a)

– pour CoO_2 , espèce neutre,

$$no(\text{Co}) + 2no(\text{O}) = no(\text{Co}) + 2(-\text{II}) = q = 0$$

$$no(\text{Co}) = +\text{IV}$$

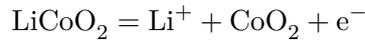
– pour LiCoO_2 , espèce neutre

$$no(\text{Li}) + no(\text{Co}) + 2no(\text{O}) = (+\text{I}) + no(\text{Co}) + 2(-\text{II}) = q = 0$$

$$no(\text{Co}) = +\text{III}$$

Dans le couple ($\text{CoO}_2/\text{LiCoO}_2$) du cobalt, le nombre d'oxydation du cobalt est plus élevé dans CoO_2 (+IV) que dans LiCoO_2 (+III), donc l'oxydant est CoO_2 , le réducteur LiCoO_2 .

b) Lors de la charge, il y a oxydation du cobalt, donc augmentation de son nombre d'oxydation, tandis que les nombres d'oxydation des autres espèces sont inchangés. En particulier le lithium reste au nombre d'oxydation +I, donc sous la forme Li^+ . La demi-réaction associée s'écrit

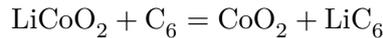


II.B.3)

Lors de la charge, les demi-réactions sont celles écrites précédemment

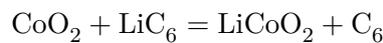


d'où l'équation-bilan complète



Dans laquelle un électron est échangé.

Lors de la décharge la réaction est inversée



II.B.4)

a) La batterie fournit une puissance $P = 328 \text{ kW}$ pendant $\Delta t = 45 \text{ min}$, soit une énergie

$$W = P\Delta t = 328 \times 10^3 \times 45 \times 60 = 8,86 \times 10^8 \text{ J}$$

$$W = 8,86 \times 10^8 \text{ J} \times \frac{1}{3600} \text{ h} = 2,46 \times 10^5 \text{ Wh} = 246 \text{ kWh}$$

b) La batterie de masse $m = 1500 \text{ kg}$ doit fournir $P = 328 \text{ kW}$ soit une puissance massique

$$p_m = \frac{P}{m} = 219 \text{ W kg}^{-1}$$

c) La batterie doit délivrer W , soit une énergie massique

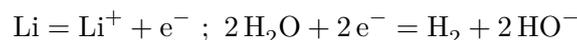
$$E_m = \frac{W}{m} = \frac{2,46 \times 10^5}{1500} = 165 \text{ Wh kg}^{-1}$$

d) La figure 5 représente la puissance massique (specific power, W kg^{-1}) en fonction de l'énergie massique (specific energy, Wh kg^{-1}). D'après les calculs qui précèdent, seuls les accumulateurs Li-ion haute énergie (Li-ion energy) possèdent une énergie massique suffisante ($E_m \approx 170 \text{ Wh kg}^{-1}$) de tous les types proposés. On vérifie également que la puissance massique nécessaire (219 W kg^{-1}) est située dans la plage disponible pour ce type d'accumulateurs, comprise entre 10 et 1000 Wh kg^{-1} .

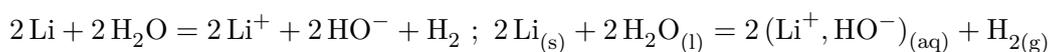
II.C - le choix de l'électrolyte

II.C.1)

a) Les demi-réactions d'oxydation du lithium et de réduction de l'eau (à pH neutre) s'écrivent



soit la réaction



b) D'après les données de l'énoncé

$$\Delta_r H^\ominus = -446 \text{ kJ mol}^{-1} < 0$$

La réaction est bien fortement exothermique.

c) La réaction se produit avec formation de gaz, donc qualitativement $\Delta_r S^\ominus > 0$, $\Delta_r G^\ominus = \Delta_r H^\ominus - T\Delta_r S^\ominus < 0$, et finalement $K^\ominus \gg 1$: la réaction du lithium avec l'eau est spontanée, ce qui nécessite l'utilisation d'un électrolyte non aqueux pour éviter la réaction parasite du lithium avec l'eau.

II.C.2)

L'utilisation de la loi de Kohlrausch et des données de l'énoncé permet d'écrire pour la solution de KCl, en prenant garde aux conversions

$$\sigma = \lambda_{\text{K}^+}[\text{K}^+] + \lambda_{\text{Cl}^-}[\text{Cl}^-] = 7,35 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^3 + 7,63 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^3 = 45 \text{ S m}^{-1}$$

La conductivité de l'électrolyte à 25 °C est de l'ordre de $8,3 \text{ mS cm}^{-1} = 0,83 \text{ S m}^{-1}$, très inférieure à celle de la solution de référence : l'électrolyte utilisé n'est pas très bon conducteur.

III la propulsion de la capsule

III.A - production du champ magnétique

III.A.1)

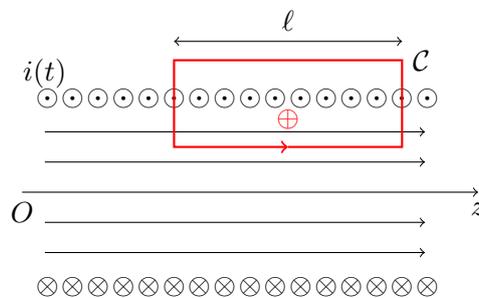
a) La circulation du champ magnétique sur une courbe fermée est égale au produit de la perméabilité magnétique du vide μ_0 par l'intensité enlacée par la courbe

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

b)

- le solénoïde infini est invariant par rotation autour de son axe Oz , et par translation le long de son axe, donc en coordonnées cylindriques d'axe Oz , les composantes du champ magnétique ne dépendent que de la distance à l'axe r ;
- tout plan de section droite du solénoïde est plan de symétrie des courants, donc le champ magnétique en tout point est dirigé selon Oz :

$$\vec{B} = B(r)\vec{e}_z$$



On considère un circuit rectangulaire de côtés parallèles à l'axe du solénoïde de longueur ℓ , situés l'un à l'intérieur du solénoïde à la distance r de l'axe et orienté selon \vec{e}_z , l'autre à l'extérieur, où le champ magnétique est nul. Les deux autres côtés sont perpendiculaires à l'axe Oz , donc au champ magnétique et ne contribuent pas à sa circulation.

Ce circuit enlace $n\ell$ spires où n est le nombre de spires par unité de longueur. Le théorème d'Ampère s'écrit

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r)\ell = \mu_0 I_{\text{enlacé}} = \mu_0 n \ell i$$

soit finalement l'expression classique du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z = B_0 \vec{e}_z$$

III.A.2)

a) Le champ magnétique assimilé à sa composante spatiale fondamentale s'écrit

$$\vec{B}(x, t) = \frac{4B_0}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \vec{u}_z = \frac{4\mu_0 n I(t)}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \vec{u}_z$$

En exprimant $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$, on trouve finalement

$$\vec{B}(x, t) = B'_0 \cos(\omega t) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \vec{u}_z$$

b) On utilise le formulaire pour transformer l'expression précédente en

$$\vec{B}(x, t) = \frac{B'_0}{2} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \omega t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t\right) \right) \vec{u}_z$$

Il s'agit de la superposition de deux ondes progressives :

– se propageant selon les x croissants

$$\vec{B}_+(x, t) = \frac{B'_0}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t\right) \vec{u}_z$$

de vecteur d'onde et vitesse de phase

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_x ; v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda\omega}{2\pi}$$

– se propageant selon les x décroissants

$$\vec{B}_-(x, t) = \frac{B'_0}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \omega t\right) \vec{u}_z$$

de vecteur d'onde et vitesse de phase

$$\vec{k} = -\frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_x ; v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda\omega}{2\pi}$$

(les deux ondes ont même vitesse de phase)

III.A.3)

Qualitativement, lorsqu'on se déplace selon les x croissants, chaque paire de solénoïdes est en retard par rapport à la précédente de $T/3$ où T est la période temporelle. Donc à l'instant $t' = t + T/3$ il y a décalage spatial du champ d'une paire de solénoïde donc de $\lambda/3$ dans le sens des x croissants par rapport à sa forme à l'instant t : le champ se propage selon les x croissants à la vitesse de phase λ/T .

Pour effectuer le calcul, le plus simple est de faire apparaître les deux ondes progressives se propageant selon chacune de direction $\pm x$ pour chacun des termes de l'expression de \vec{B} , en utilisant le formulaire ($2 \sin(a) \cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$)

$$\begin{aligned} \vec{B} = & \frac{B'_0}{2} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \omega t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t\right) \right) + \\ & \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \omega t - \frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t\right) + \\ & \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \omega t - \frac{8\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t\right) \Big) \vec{u}_z \end{aligned}$$

Les termes correspondant aux ondes se propageant selon les x décroissants se mettent sous la forme

$$\sin(u) + \sin\left(u + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(u - \frac{2\pi}{3}\right) ; u = \frac{2\pi}{\lambda}x + \omega t$$

grâce à la formule $2 \sin(a) \cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$, cette expression s'écrit, avec $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1/2$

$$\sin(u) + 2 \sin(u) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

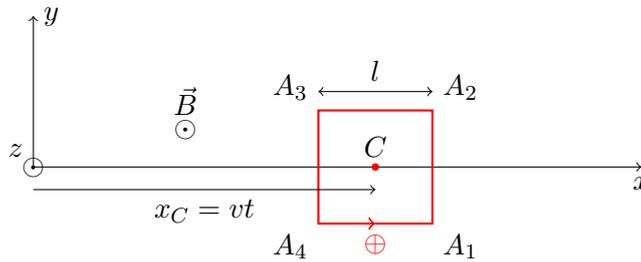
Les ondes se propageant selon les x décroissants se compensent, et il reste

$$\vec{B} = \frac{3B'_0}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t\right) \vec{u}_z$$

Il s'agit bien d'une onde se propageant selon \vec{u}_x , d'amplitude $3B'_0/2$.

III.B - Force s'exerçant sur le rotor

III.B.1)



Le centre C de la spire a pour abscisse $x_C = vt$. En orientant la spire de sorte que sa normale soit dirigée selon \vec{u}_z

$$\phi(t) = \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \approx \vec{B}(x_C, t) \cdot S\vec{u}_z = \frac{3B'_0 l^2}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x_C - \omega t\right) = \frac{3B'_0 l^2}{2} \sin\left(\left(\frac{2\pi}{\lambda}v - \omega\right)t\right)$$

III.B.2)

D'après la loi de Faraday

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{3B_0' l^2}{2} \left(\omega - \frac{2\pi}{\lambda} v \right) \cos \left(\left(\frac{2\pi}{\lambda} v - \omega \right) t \right)$$

III.B.3)

En négligeant l'auto-induction (l'énoncé ne le propose pas, mais en l'absence de toute information, on peut faire cette hypothèse, même si l'énoncé indique « en régime sinusoïdal établi », ce qui pourrait laisser supposer que l'auto-induction doit être prise en compte) l'équation électrique de la spire s'écrit simplement

$$e = Ri$$

soit

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{3B_0' l^2}{2R} \left(\omega - \frac{2\pi}{\lambda} v \right) \cos \left(\left(\frac{2\pi}{\lambda} v - \omega \right) t \right)$$

(et si on ne tient pas compte de l'auto-induction il n'y a pas à séparer transitoire et régime établi)

III.B.4)

La force de Laplace élémentaire a pour expression

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

- sur les deux côtés de la spire parallèles à l'axe Ox , (A_2A_3) et (A_4A_1), le profil du champ magnétique $\vec{B}(x, t)$ est le même, mais l'intensité circule en sens opposé : pour deux éléments de longueur $d\ell$ situés à la même abscisse x , les forces de Laplace élémentaires se compensent, et la résultante des forces de Laplace sur ces deux côtés est nulle ;
- sur le côté (A_1A_2) d'abscisse $x = x_C + l/2$

$$d\vec{F} = i(t) d\ell \wedge \vec{B} = i(t) dy \vec{u}_y \wedge B \left(x_C + \frac{l}{2}, t \right) \vec{u}_z = i(t) B \left(x_C + \frac{l}{2}, t \right) dy \vec{u}_x$$

Comme le courant circule dans le sens des y croissants sur ce côté, la résultante des forces de Laplace sur ce côté de spire a pour expression

$$\vec{F}_{12} = i(t) B \left(x_C + \frac{l}{2}, t \right) l \vec{u}_x = i(t) \frac{3B_0' l}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(x_C + \frac{l}{2} \right) - \omega t \right) \vec{u}_x$$

- sur le côté (A_3A_4) d'abscisse $x = x_C - l/2$, la valeur du champ est modifiée ainsi que le sens de parcours de l'intensité. On obtient

$$\vec{F}_{34} = -i(t) B \left(x_C - \frac{l}{2}, t \right) l \vec{u}_x = -i(t) \frac{3B_0' l}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(x_C - \frac{l}{2} \right) - \omega t \right) \vec{u}_x$$

Finalement la résultante des actions de Laplace sur la spire a pour expression

$$\vec{F} = i(t) \frac{3B_0' l}{2} \left(\sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(x_C + \frac{l}{2} \right) - \omega t \right) - \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(x_C - \frac{l}{2} \right) - \omega t \right) \right) \vec{u}_x$$

La différence des sinus s'écrit sous la forme

$$\sin(a + b) - \sin(a - b) = \sin(b + a) + \sin(b - a) = 2 \sin(b) \cos(a) ; a = \frac{2\pi}{\lambda} x_C - \omega t ; b = \frac{\pi l}{\lambda}$$

soit

$$\vec{F} = i(t) 3B_0' l \sin\left(\frac{\pi l}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x_C - \omega t\right)$$

On peut alors remplacer $i(t)$ et x_C par leurs expressions, et simplifier le sinus dans le cadre de l'hypothèse $l \ll \lambda$ utilisée pour le calcul de ϕ : $\sin\left(\frac{\pi l}{\lambda}\right) \approx \frac{\pi l}{\lambda}$

$$\vec{F} = \frac{\pi(3B_0'l^2)^2}{2R\lambda} \left(\omega - \frac{2\pi}{\lambda}v\right) \cos^2\left(\left(\frac{2\pi}{\lambda}v - \omega\right)t\right) \vec{u}_x$$

En remarquant enfin que

$$\omega - \frac{2\pi}{\lambda}v = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda\omega}{2\pi} - v\right) = \frac{2\pi}{\lambda}(v_\varphi - v)$$

où v_φ désigne la vitesse de phase de l'onde de champ magnétique, l'expression de la force de Laplace instantanée devient

$$\vec{F}(t) = \frac{(3\pi B_0'l^2)^2}{R\lambda^2} (v_\varphi - v) \cos^2\left(\left(\frac{2\pi}{\lambda}v - \omega\right)t\right) \vec{u}_x$$

La force de Laplace varie comme $\cos^2(\omega't)$, terme dont la moyenne temporelle vaut 1/2, donc la force de Laplace moyenne a pour expression

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{(3\pi B_0'l^2)^2}{2R\lambda^2} (v_\varphi - v) \vec{u}_x$$

III.B.5)

La force de Laplace moyenne est colinéaire au mouvement donc sa puissance est non nulle et elle influence le mouvement de la spire.

Au démarrage, $v = 0$, donc

$$\langle \vec{F}_{\text{démarrage}} \rangle = \frac{(3\pi B_0'l^2)^2}{2R\lambda^2} v_\varphi \vec{u}_x \neq 0$$

La force de Laplace au démarrage est non nulle, donc la capsule peut démarrer sous l'action de cette seule force, dirigée selon les x croissants.

III.B.6)

L'orientation de la force de Laplace dépend du signe de la différence $v_\varphi - v$:

- si $0 \leq v \leq v_\varphi$, $\langle \vec{F} \rangle$ est dirigée selon les x croissants, donc la force est motrice ;
- si $v_\varphi < v$, $\langle \vec{F} \rangle$ est dirigée selon les x décroissants, et il s'agit alors d'une force de freinage.

La vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega\lambda}{2\pi}$ peut être réglée par la pulsation ω du courant d'alimentation des solénoïdes : pour freiner la capsule, il faut diminuer v_φ jusqu'à une valeur inférieure v , donc diminuer la pulsation ω du courant d'alimentation des solénoïdes.