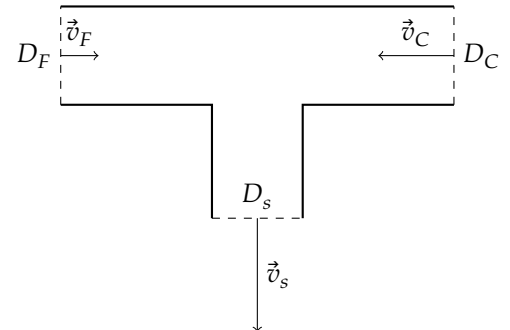


## I Arrivée d'eau

1. Le débit d'eau sortant d'un mitigeur de salle de bain ouvert au maximum, permet de remplir un verre d'eau en une seconde. Le débit volumique est donc environ  $D_v \approx 20 \text{ cL/s} = 20 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ .  
Si on note  $\rho = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  la masse volumique de l'eau, le débit massique est alors  $D_s = \rho D_v$ . Soit  $D_s = 20 \cdot 10^{-2} \text{ kg/s}$ .

Le débit massique est environ  $D_s = 2 \cdot 10^2 \text{ g/s}$

2. On considère le mitigeur représenté ci-contre. L'eau étant un fluide incompressible, le débit massique entrant est égal au débit massique sortant :  $D_s = D_F + D_C$



3. Si on estime le volume interne du mitigeur à 20 cL, et en utilisant le débit volumique de la première question, le temps de séjour de l'eau est de l'ordre de 1 s dans le mitigeur. Cette durée n'est pas suffisante pour que des transferts thermiques significatifs aient lieu entre l'eau et l'air extérieur.

L'eau est en évolution adiabatique dans le mitigeur.

4. On considère un système fermé  $\Sigma(t)$  défini aux deux instants  $t$  et  $t + dt$

$$\text{par : } \begin{cases} \Sigma(t) = \Sigma_{\text{com}} \cup \Sigma_F \cup \Sigma_C \\ \Sigma(t + dt) = \Sigma_{\text{com}} \cup \Sigma_s \end{cases}$$

L'eau ne reçoit de travail que des forces de pression et aucun échange thermique n'a lieu, le premier principe appliqué au système fermé  $\Sigma$  s'écrit alors :  $H_{\Sigma}(t + dt) - H_{\Sigma}(t) = 0$

Or, en utilisant l'additivité de l'enthalpie :

$$\begin{cases} H_{\Sigma}(t) = H_{\Sigma_{\text{com}}} + H_{\Sigma_F} + H_{\Sigma_C} \\ H_{\Sigma}(t + dt) = H_{\Sigma_{\text{com}}} + H_{\Sigma_s} \end{cases}$$

Le régime étant permanent, les enthalpies du fluide dans les domaines  $\Sigma_C$ ,  $\Sigma_F$  et  $\Sigma_s$  sont indépendantes du temps.

Donc  $H_{\Sigma_s} = H_{\Sigma_F} + H_{\Sigma_C}$ .

$$\text{Or } \begin{cases} H_{\Sigma_F} = D_F h_F dt \\ H_{\Sigma_C} = D_C h_C dt \\ H_{\Sigma_s} = D_s h_s dt \end{cases} \quad \text{Donc } \boxed{D_s h_s = D_F h_F + D_C h_C}$$

5. En utilisant les résultats des questions 2 et 4 :  $(D_C + D_F)h_s = D_C h_C + D_F h_F$ .

Donc  $D_C(h_s - h_C) + D_F(h_s - h_F) = 0$ .

$$\text{Or } \begin{cases} h_s - h_C = c_e(T_s - T_C) \\ h_s - h_F = c_e(T_s - T_F) \end{cases} \quad , \text{ donc } D_C(T_s - T_C) + D_F(T_s - T_F) = 0.$$

$$\text{Donc } \boxed{T_s = \frac{D_C T_C + D_F T_F}{D_C + D_F}}$$

6. En notant  $T'_C = 70^\circ\text{C}$  la température de l'eau chaude le matin et  $T'_s$  la température à la sortie du robinet le matin, et en

$$\text{considérant que les débits sont inchangés : } \begin{cases} T_s - T_F = \frac{D_C}{D_C + D_F}(T_C - T_F) \\ T'_s - T_F = \frac{D_C}{D_C + D_F}(T'_C - T_F) \end{cases}$$

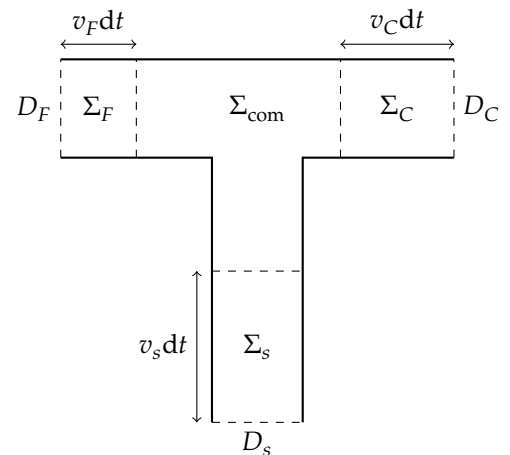
$$\text{Donc } \frac{T'_s - T_F}{T_s - T_F} = \frac{T'_C - T_F}{T_C - T_F} \text{ et } \boxed{T'_s = \frac{(T'_C - T_F)(T_s - T_F)}{T_C - T_F} + T_F}. \text{ Soit } \boxed{T'_s = 57^\circ\text{C}}$$

Il y a donc un risque de brûlure après quelques secondes si l'on en croit les données de l'énoncé.

En réalité, le risque est très limité. L'eau et les tuyaux sont froids au petit matin, il faut quelques minutes pour que l'eau chaude arrive au robinet et que les tuyaux se réchauffent. L'utilisateur a le temps de sentir la température de l'eau s'élever.

7. Pour identifier la voie par laquelle l'eau chaude arrive, il suffit d'imaginer que l'eau en sortie a une température supérieure à la température de consigne. La cire se dilate alors, ce qui réduit le débit de la voie 1 et augmente celui de la voie 2. Ce mécanisme permet de réduire la température de l'eau de sortie si l'eau chaude arrive par la voie 1.

L'eau chaude arrive par la voie 1, l'eau froide par la voie 2.



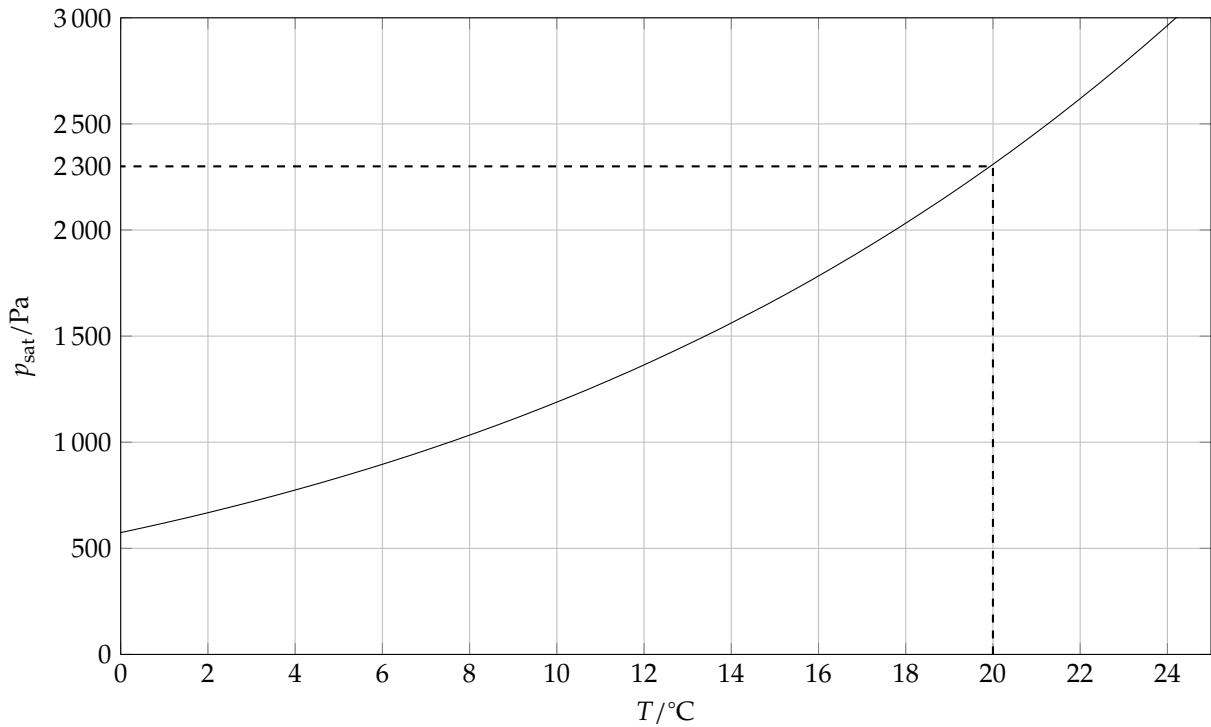
## II L'air humide

### II.A Grandeurs caractéristiques de l'air humide

8. On considère un volume  $V$  d'air humide. L'humidité absolue est alors  $x = \frac{m_v}{m_{as}}$  où 
$$\begin{cases} m_v = \frac{p_v VM_e}{RT} \\ m_{as} = \frac{(p - p_v) VM_{as}}{RT} \end{cases} .$$

Donc  $x = \frac{M_e}{M_{as}} \frac{p_v}{p - p_v}$  et  $x = d \frac{p_v}{p - p_v}$  avec  $d = \frac{M_e}{M_{as}}$

9. D'après la figure fournie, lorsque la température est de  $20^\circ\text{C}$ , la pression de vapeur saturante de l'eau est  $p_{\text{sat}} = 2,30 \text{ kPa}$ .



La valeur maximale de l'humidité relative est alors  $x_{\text{max}} = d \frac{p_{\text{sat}}}{p - p_{\text{sat}}}$ . Soit  $x_{\text{max}} = 1,3 \cdot 10^{-2}$ .

10. On note :

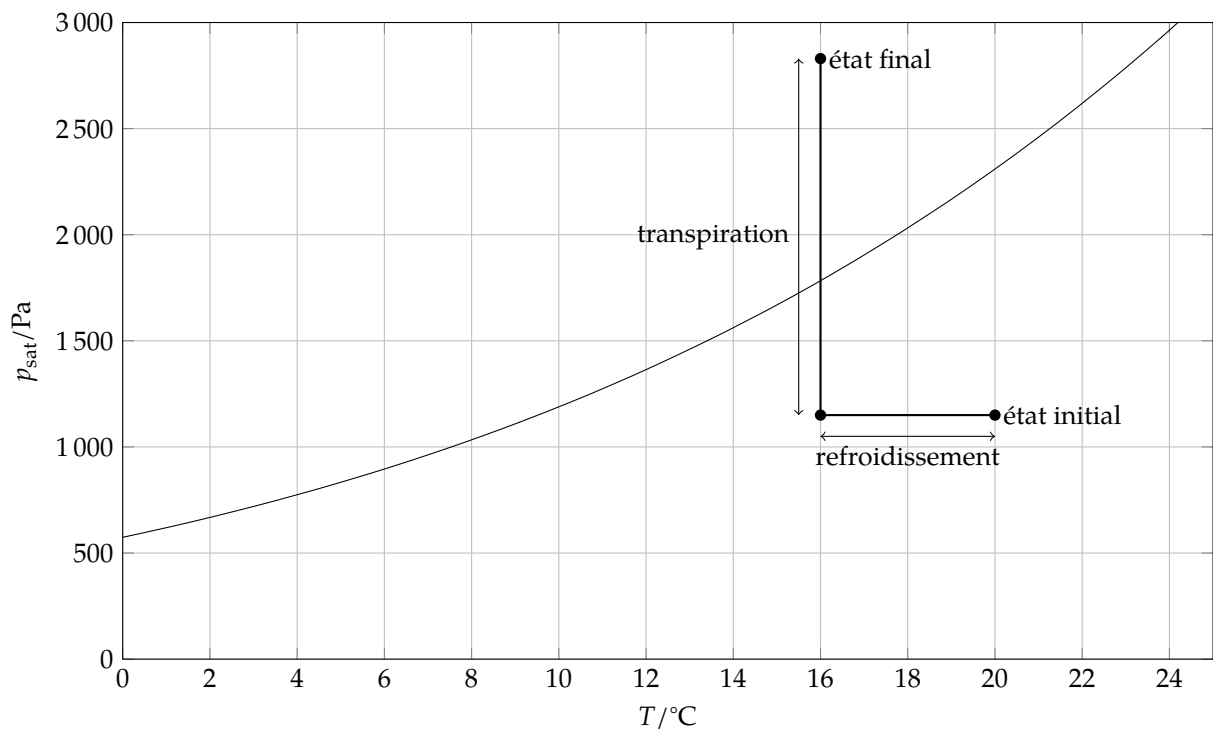
- $\tau = 10 \text{ h}$  la durée de l'étude ;
- $q = 50 \cdot 10^{-3} \text{ kg/h}$  le débit massique d'eau issue d'un dormeur ;
- $H_{Ri} = 0,50$  l'humidité relative en début de nuit ;
- $H_{Rf}$  l'humidité relative en fin de nuit ;
- $p_i$  et  $p_f$  la pression partielle en eau en début et fin de nuit ;
- $T_0$  et  $T_f$  la température en début et fin de nuit,
- $m_i$  et  $m_f$  la masse d'eau en début et en fin de nuit.

Alors, en supposant qu'il n'y a pas de condensation :

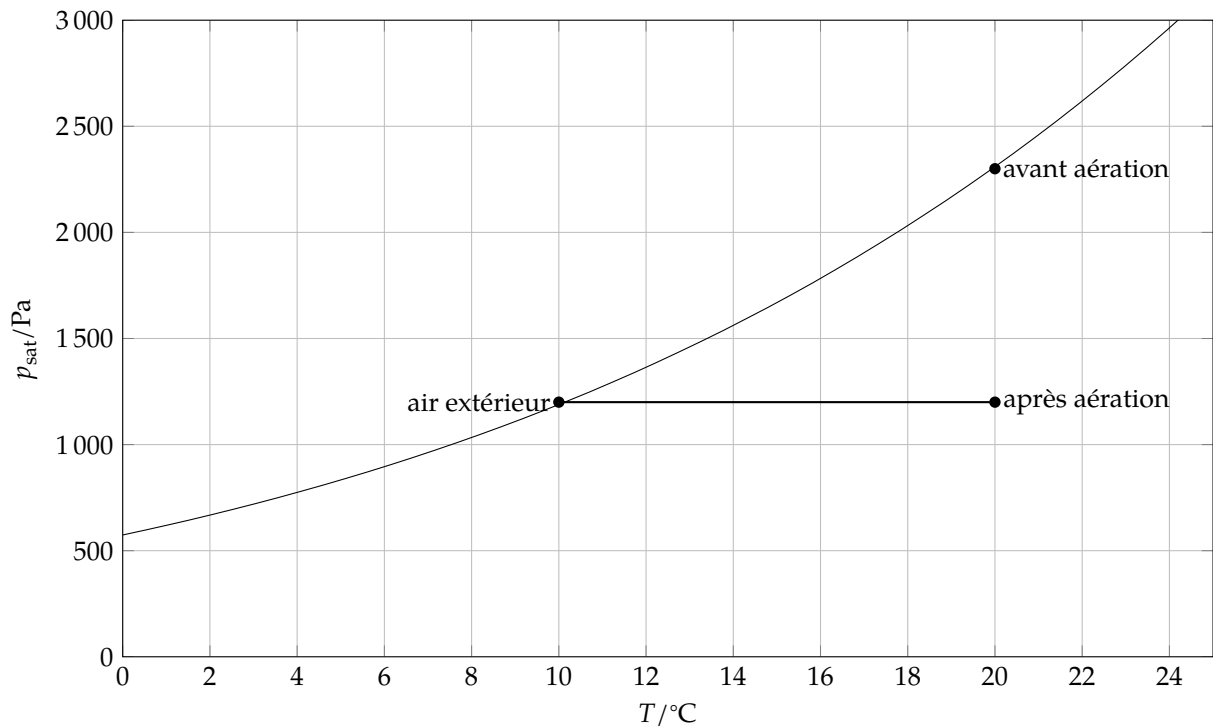
$$\begin{cases} m_i = H_{Ri} p_{\text{sat}}(T_0) \frac{VM_e}{RT} & \text{loi des gaz parfaits} \\ m_f = m_i + q\tau & \text{dégagement d'eau pendant la nuit} \\ H_{Rf} = \frac{m_f RT_f}{p_{\text{sat}}(T_f) VM_e} & \text{humidité relative en fin de nuit} \end{cases}$$

Donc  $H_{Rf} = H_{Ri} \frac{p_{\text{sat}}(T_0)}{p_{\text{sat}}(T_f)} + \frac{q\tau RT_f}{p_{\text{sat}}(T_f) VM_e}$ . Soit  $H_{Rf} = 1,57$

Cette valeur est plus grande que 1, l'eau se condense donc : L'eau se condense sur les parties plus froides de la chambre.



11. Lors de l'aération de la pièce, de l'air humide est chauffé de 10 °C à 20 °C sans que sa composition soit modifiée :



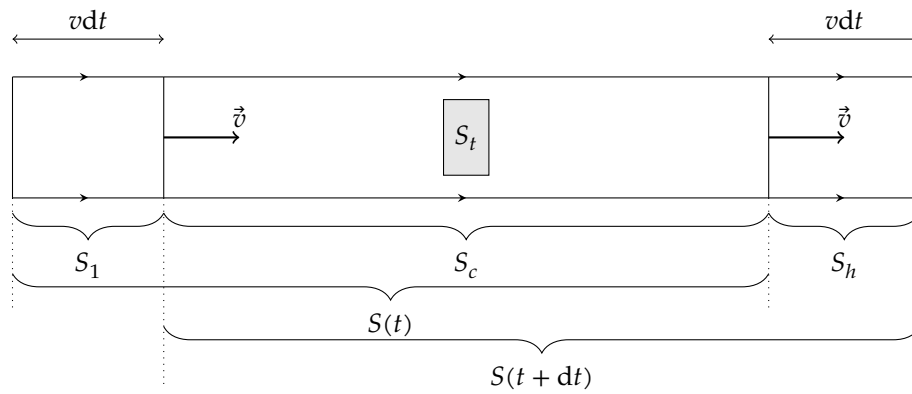
En particulier, la pression partielle en eau n'est pas modifiée lors de l'échauffement.

L'humidité relative est alors :  $H_R = \frac{p_{\text{sat}}(T_e)}{p_{\text{sat}} T_e}$ . Soit  $H_R = 0,52$

Dans les conditions décrites, le fait d'aérer la pièce permet de faire diminuer l'humidité relative de celle-ci, et de rendre celle-ci plus agréable.

## II.B Étude d'un hygromètre

12. On considère un système fermé  $S(t)$  défini par le schéma ci-dessous :  $\begin{cases} S(t) = S_1 \cup S_c \\ S(t + dt) = S_c \cup S_h \end{cases}$  et on note  $m(t)$  la masse sous forme de vapeur dans  $S(t)$ .



Les équations qui régissent le système sont :

$$\begin{cases}
 m(t + dt) = m(t) + \dot{m}_{ev} dt & \text{la masse de vapeur augmente à cause de l'évaporation} \\
 m(t) = m_{S_1}(t) + m_{S_c}(t) & \text{masse de vapeur à l'instant initial} \\
 m(t + dt) = m_{S_c}(t + dt) + m_{S_h}(t + dt) & \text{masse de vapeur à l'instant final} \\
 m_{S_c}(t) = m_{S_h}(t + dt) & \text{le régime est permanent} \\
 m_{S_1} = D_{m,as} dt x_1 & \text{l'air entrant a une humidité absolue } x_1 \\
 m_{S_1} = D_{m,as} dt x_{sat}(T_h) & \text{l'air sortant est saturé}
 \end{cases}$$

Donc  $\begin{cases} m(t + dt) - m(t) = \dot{m}_{ev} dt \\ m(t + dt) - m(t) = D_{m,as} dt x_{sat}(T_h) - D_{m,as} dt x_1 \end{cases}$  et  $\dot{m}_{ev} = D_{m,as} (x_{sat}(T_h) - x_1)$

13. On considère toujours le système fermé  $S(t)$  défini à la question précédente et les systèmes ouverts :

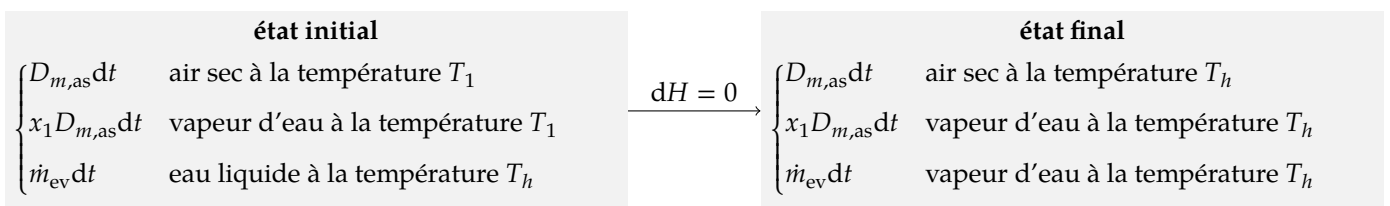
$$\begin{cases}
 S_1, S_c, S_h & \text{contiennent uniquement de la vapeur d'eau} \\
 S_t & \text{contient de l'eau liquide}
 \end{cases}$$

Les équations sont :

$$\begin{cases}
 H_S(t + dt) = H_S(t) & \text{le système } S \text{ est en évolution isobare et adiabatique} \\
 H_S(t) = H_1(t) + H_c(t) + H_t(t) & \text{additivité de l'enthalpie} \\
 H_S(t + dt) = H_h(t + dt) + H_c(t + dt) + H_t(t + dt) & \text{additivité de l'enthalpie} \\
 H_c(t + dt) = H_c(t) & \text{le régime est permanent}
 \end{cases}$$

Donc :  $[H_h(t + dt) + H_t(t + dt)] - [H_1(t) + H_t(t)] = 0$

Cette équation correspond à un bilan d'enthalpie pour le système suivant :



Donc :

$$D_{m,as} dt c_{p,as}(T_h - T_1) + x_1 D_{m,as} dt c_{p,v}(T_h - T_1) + \dot{m}_{ev} dt L_v(T_h) = 0$$

En utilisant l'expression du débit trouvé à la question précédente :

$$c_{p,as}(T_h - T_1) + x_1 c_{p,v}(T_h - T_1) + L_v(T_h) (x_{sat}(T_h) - x_1) = 0$$

Donc  $x_1 = \frac{x_{sat}(T_h) L_v(T_h) + c_{p,as}(T_h - T_1)}{L_v(T_h) + c_{p,v}(T_1 - T_h)}$

14. En prenant  $T_1 = 293 \text{ K}$  et  $T_h = 288 \text{ K}$  et avec  $L_v(T) = \left(3155 - 2,39 \frac{T}{\text{K}}\right) \text{ kJ/kg}$ , on trouve :  $\begin{cases} L_v(T_h) = 2,5 \text{ MJ/kg} \\ c_{p,v}(T_1 - T_h) = 10 \text{ kJ/kg} \end{cases}$

Donc  $L_v(T_h) \gg c_{p,v}(T_1 - T_h)$  et l'expression de  $x_1$  se simplifie en :  $x_1 \approx x_{sat}(T_h) + \frac{c_{p,as}}{L_v(T_h)} (T_h - T_1)$

Donc  $x_1 \approx x_{sat}(T_h) - A(T_1 - T_h)$  avec  $A = \frac{c_{p,as}}{L_v(T_h)}$

L'humidité relative de l'air en entrée est  $H_R = \frac{p_v(T_1)}{p_{sat}(T_1)} = \frac{x_1}{x_{sat}(T_1)}$ .

En utilisant l'expression précédente de  $x_1$  :  $H_R = \frac{x_{\text{sat}}(T_h)}{x_{\text{sat}}(T_1)} \left[ 1 - \frac{c_{p,v}}{L_v(T_h)x_{\text{sat}}(T_h)} (T_1 - T_h) \right]$

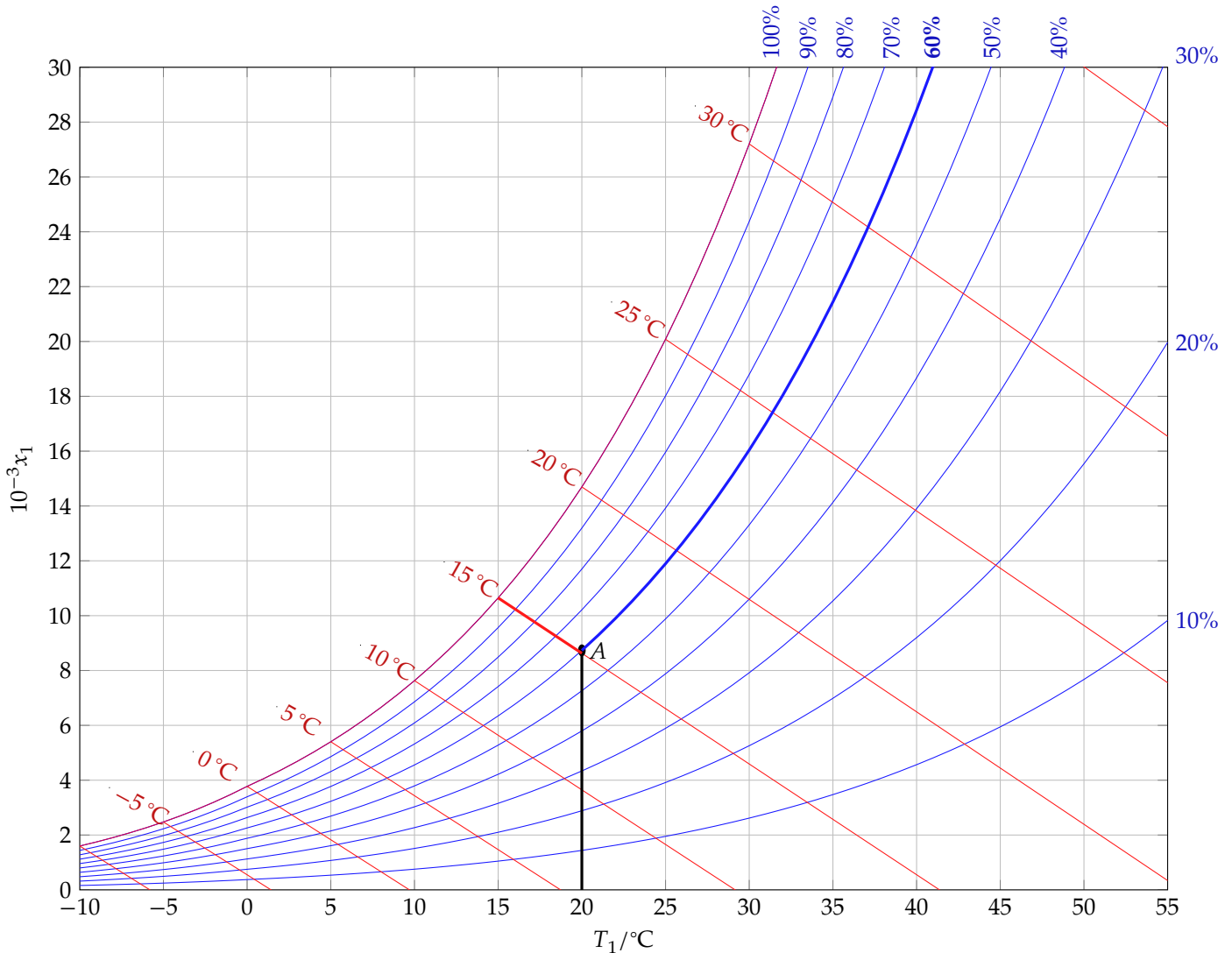
Or  $x_{\text{sat}}(T_h) = \frac{M_e p_{\text{sat}}(T_h)}{M_{\text{as}} p}$  et  $\frac{x_{\text{sat}}(T_h)}{x_{\text{sat}}(T_1)} = \frac{p_{\text{sat}}(T_h)}{p_{\text{sat}}(T_1)}$

Donc  $H_R = \frac{p_{\text{sat}}(T_h)}{p_{\text{sat}}(T_1)} \left[ 1 - \frac{c_{p,v} M_{\text{as}} p}{L_v(T_h) M_e p_{\text{sat}}(T_h)} (T_1 - T_h) \right]$

Donc  $H_R = \frac{p_{\text{sat}}(T_h)}{p_{\text{sat}}(T_1)} \left[ 1 - \frac{\gamma}{p_{\text{sat}}(T_h)} (T_1 - T_h) \right]$  avec  $\gamma = \frac{c_{p,v} M_{\text{as}} p}{L_v(T_h) M_e}$

15. Avec  $\begin{cases} p_{\text{sat}}(T_h) = 1,7 \cdot 10^3 \text{ Pa} \\ p_{\text{sat}}(T_1) = 2,3 \cdot 10^3 \text{ Pa} \end{cases}$ , on trouve  $H_R = 0,45$

16. On considère le diagramme psychrométrique. Le point de fonctionnement A est tel que  $\begin{cases} T_1 = 20^\circ\text{C} \\ T_h = 15^\circ\text{C} \end{cases}$ .



Sur le diagramme, on lit  $x_1 = 8,5 \text{ g/kg} = 8,7 \cdot 10^{-3}$  et  $H_R = 0,60$

Cette valeur est supérieure à celle déterminée à la question 15. L'écart vient peut être de la modélisation grossière du champ de température faite à la question 13. Dans la réalité, le tissu n'est pas à la même température que l'air à la sortie du système.

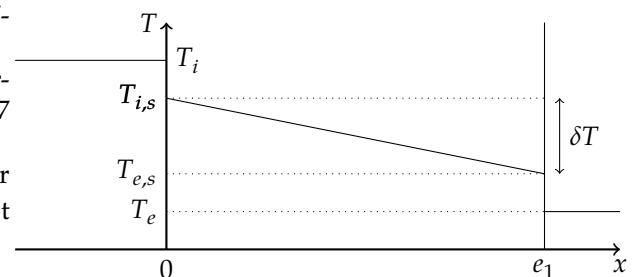
### III Miroir antibuée

17. En utilisant les informations et les notations définies aux questions 17-22, on peut tracer le profil ci-contre de température.

Comme l'on demande de retrouver l'expression de la résistance thermique à la question suivante, on se propose de traiter la question 17 sans utiliser cette notion.

Le champ de température dans le mur est de la forme  $T(x)$ , le vecteur densité de courant thermique est alors de la forme  $\vec{j}(x) = j(x)\vec{e}_x$ . Et

d'après la loi de FOURIER :  $j(x) = -\lambda_1 \frac{dT}{dx}$ .



En régime permanent, l'équation de la diffusion thermique dans le mur est  $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$ , dont la solution est, en tenant compte des conditions aux limites :  $T(x) = T_{i,s} - \frac{\delta T}{e_1}x$ .

Le vecteur densité de courant thermique est alors  $\vec{j} = \lambda_1 \frac{\delta T}{e_1} \vec{e}_x$ , et la puissance transmise à travers le mur est  $P_{th} = jHL$ .

Donc 
$$P_{th} = \frac{\lambda_1 HL}{e_1} \delta T$$

18. La résistance thermique est définie par :  $R_{c,1} = \frac{\delta T}{P_{th}}$ . Donc 
$$R_{c,1} = \frac{e_1}{\lambda_1 S_1} \text{ avec } S_1 = HL.$$

19. La surface extérieure du mur est plus rugueuse que la surface intérieure : la surface effective de contact entre le solide et l'air est donc supérieure à l'extérieur.

- En outre, les mouvements d'air sont plus importants à l'extérieur, à cause du vent ou d'une convection plus importante.
- Le coefficient de Newton est donc plus grand sur la face extérieure du mur que sur la face intérieure  $h_e > h_i$ .

20. La puissance transmise, dans le sens des  $x$  croissants, aux interfaces est : 
$$\begin{cases} P_{th} = h_i S_1 (T_i - T_{i,s}) \\ P_{th} = h_e S_1 (T_{e,s} - T_e) \end{cases}$$

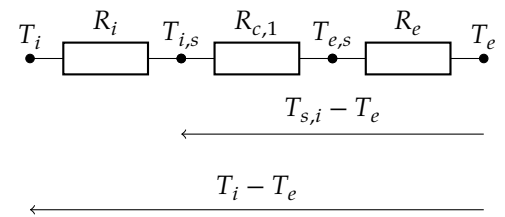
Or les résistances thermiques sont 
$$\begin{cases} R_i = \frac{T_i - T_{i,s}}{P_{th}} \\ R_e = \frac{T_{e,s} - T_e}{P_{th}} \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} R_i = \frac{1}{h_i S_1} \\ R_e = \frac{1}{h_e S_1} \end{cases}$$

21. Le circuit électrique équivalent au problème étudié est représenté ci-contre.

Le montage a une structure de pont diviseur de tension :

$$T_{s,i} - T_e = \frac{R_{c,1} + R_e}{R_{c,1} + R_e + R_i} (T_i - T_e)$$

$$\text{Donc } T_{s,i} = T_e + \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_{c,1} + R_e}} (T_i - T_e)$$



Et en utilisant les expressions des résistances thermiques trouvées aux questions précédentes :

$$T_{s,i} = T_e + \frac{1}{1 + \frac{1}{h_i \left( \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{1}{h_e} \right)}} (T_i - T_e)$$

Donc 
$$T_{s,i} = T_e + \alpha (T_i - T_e) \text{ avec } \alpha = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1 h_e}{h_i (e_1 h_e + \lambda_1)}}$$

22. 
$$T_{s,i} = 14,5^\circ\text{C}$$
 
$$\left( T_{s,i} = 5^\circ\text{C} + \frac{1}{1 + \frac{1}{(5,0 \text{ WK}^{-1}\text{m}^{-2}) \left( \frac{0,50 \text{ m}}{1,7 \text{ WK}^{-1}\text{m}^{-1}} + \frac{1}{20 \text{ WK}^{-1}\text{m}^{-2}} \right)}} (20^\circ\text{C} - 5^\circ\text{C}) \right)$$

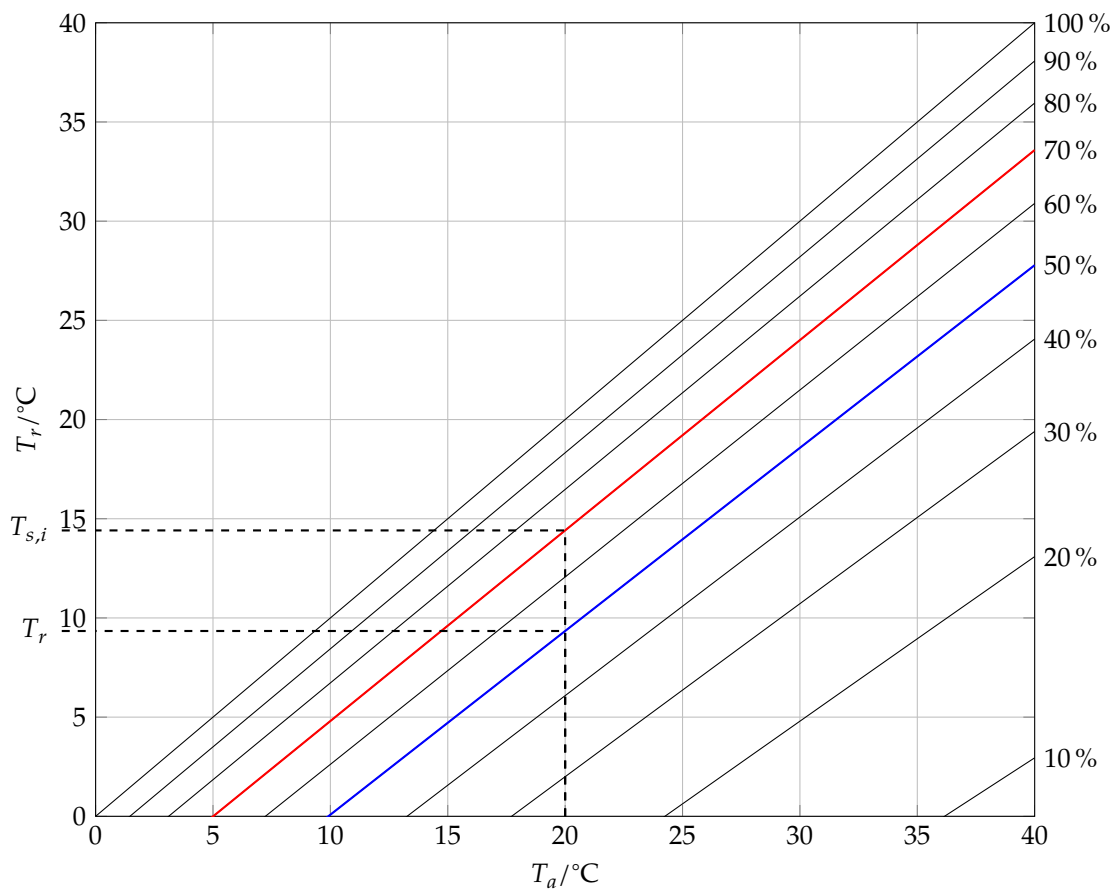
23. La résistance thermique du miroir est  $R_{c,2} = \frac{e_2}{\lambda_2 S_m}$  et celle de la portion de mur de même surface est  $R'_{c,1} = \frac{e_1}{\lambda_1 S_m}$ . Donc

$$\frac{R_{c,2}}{R'_{c,1}} = \frac{e_2 \lambda_1}{e_1 \lambda_2}$$

Avec les valeurs proposées par l'énoncé :  $\frac{R_{c,2}}{R'_{c,1}} = 1,0 \cdot 10^{-2}$

Comme le miroir et le mur sont associés en série, on pourra négliger la résistance thermique du miroir devant celle du mur et utiliser la valeur de la température de surface obtenue à la question précédente.

En utilisant le diagramme fourni, on voit que lorsque la température de l'air est  $T_i = 20^\circ\text{C}$  et que l'humidité relative est  $H_R = 50\%$ , le point de rosée est environ  $T_r = 9^\circ\text{C}$ .



Comme  $T_{s,i} > T_r$ , il n'y a pas de condensation sur le miroir.

24. Cette question est assez proche de la question 10, on utilisera donc les formules établies dans cette question.

On note :

- $\tau$  = la durée recherchée ;
- $q = 1,50$  kg/h le débit massique d'eau ;
- $H_{Ri} = 0,50$  l'humidité relative au début de la douche ;
- $H_{Rf} = 0,70$  l'humidité relative lorsque la condensation apparaît sur le miroir.

Alors  $H_{Rf} = H_{Ri} + \frac{q\tau RT_i}{p_{\text{sat}}(T_i)VM_e}$ .

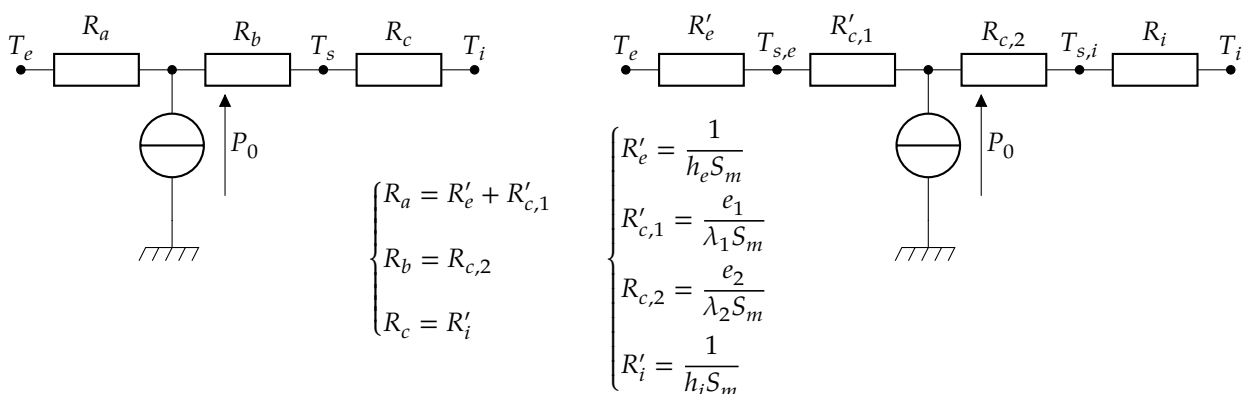
La durée cherchée est  $\tau = \frac{p_{\text{sat}}(T_i)VM_e}{qRT_i} (H_{Rf} - H_{Ri})$ .

Soit  $\tau = 122$  s  $\left( \tau = \frac{(2,3 \cdot 10^3 \text{ Pa})(15 \text{ m}^3)(1,8 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^{-3})}{(4,2 \cdot 10^{-4} \text{ kg/s})(8,31 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1})(293 \text{ K})} (0,70 - 0,50) \right)$

La condensation apparaît sur le miroir deux minutes après le début de la douche.

25. Si on considère que le système de chauffage n'est pas utilisé,  $P_0 = 0$  et il y a une puissance thermique qui traverse le mur. Les schémas (c) et (d) sont incompatibles avec cette situation.

En outre, l'apport d'énergie par effet JOULE se fait sur la face arrière du miroir, alors que la température  $T_s$  est celle de la face avant du miroir. Il y a entre ces deux faces la résistance thermique du miroir qui doit figurer sur le schéma. Le bon schéma est donc le schéma (a). Le voici, à côté de celui reprenant les notations précédentes pour les résistances thermiques et les températures.



Donc 
$$\begin{cases} R_a = \frac{1}{h_e S_m} + \frac{e_1}{\lambda_1 S_m} \\ R_b = \frac{e_2}{\lambda_2 S_m} \\ R_c = \frac{1}{h_i S_m} \end{cases}$$

Le modèle proposé ne serait parfaitement adapté pour décrire les transferts thermiques à travers le miroir et le mur que si les effets de bords étaient négligeables. Or, la largeur du miroir est comparable à l'épaisseur du mur, l'hypothèse précédente n'est donc pas valable. En particulier, le champ de température dans le mur derrière le miroir ne sera pas une fonction de  $x$  uniquement.

26. La formation de buée est évitée si  $T_s > T_i$ .

On note  $P_1$  et  $P_2$  les puissances traversant les différentes parties du système, définies et orientées par le schéma ci-contre.

Si  $T_s > T_i$ , alors  $P_2 > 0$  et donc  $T_A > T_i$ .

Or, la loi des nœuds en potentiel permet de déterminer la température  $T_A$  :

$$\frac{T_e - T_A}{R_a} + \frac{T_i - T_A}{R_b + R_c} + P_0 = 0$$

$$\text{Donc } (R_a + R_b + R_c)T_A = (R_b + R_c)T_e + R_a T_i + R_a(R_b + R_c)P_0.$$

$$\text{La condition } T_A > T_i \text{ devient alors : } (R_b + R_c)T_e + R_a T_i + R_a(R_b + R_c)P_0 > (R_a + R_b + R_c)T_i$$

$$\text{Donc } (R_b + R_c)T_e + R_a(R_b + R_c)P_0 > (R_b + R_c)T_i$$

$$\text{La condition cherchée est alors : } P_0 > \frac{T_i - T_e}{R_a} \text{ ou } P_0 > S_m \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_e} + \frac{e_1}{\lambda_1}}$$

$$\text{Soit } P_0 > 11 \text{ W} \left( P_0 > (0,25 \text{ m}^2) \frac{20^\circ\text{C} - 5^\circ\text{C}}{\frac{1}{20 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2}} + \frac{0,50 \text{ m}}{1,7 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}}} \right)$$

27. La puissance consommée par le dispositif de chauffage est  $P = 50 \text{ W}$ . Cette valeur est supérieure à la valeur trouvée à la question précédente :  $P > 11 \text{ W}$ .

La puissance est suffisante pour éviter la formation de buée.

28. On note :

- $N = 38$  le nombre de bandes conductrices ;
- $R$  la résistance électrique de l'une d'elles ;
- $R_t$  la résistance électrique totale ;
- $U = 230 \text{ V}$  la valeur efficace de la tension d'alimentation ;
- $\sigma_e$  la conductivité électrique de l'encre ;
- $\sigma_c = 5,87 \cdot 10^7 \text{ S/m}$  la conductivité électrique du cuivre.

Si on néglige la résistance électrique des éléments en cuivre devant celle des bandes conductrices, le schéma électrique équivalent au dispositif étudié est représenté ci-contre.

$$R_t = \frac{4R}{N} \text{ et } R \text{ est la résistance d'un conducteur cylindrique : } R = \frac{L}{\sigma_e \ell e}.$$

$$\text{Donc } R_t = \frac{4L}{\sigma_e \ell e N}$$

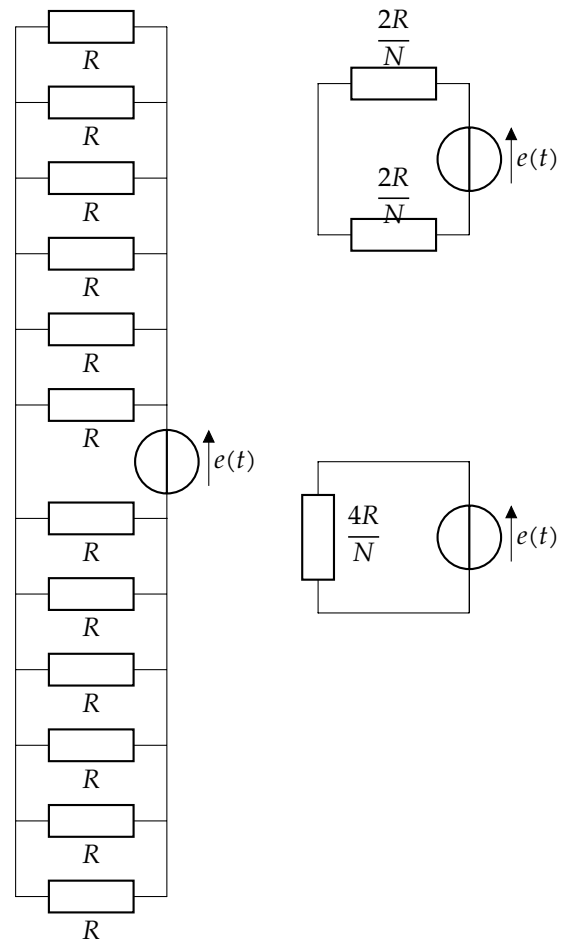
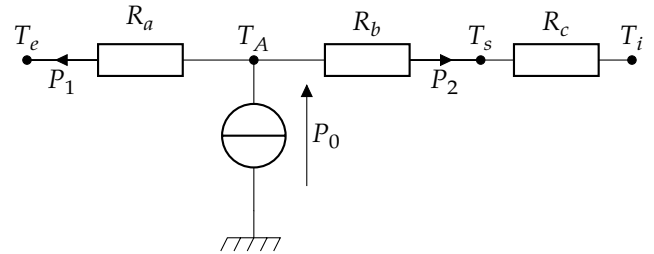
$$\text{Or la puissance dissipée par effet JOULE est donnée par } P = \frac{U^2}{R_t}.$$

$$\text{Donc } P = \frac{U^2 \sigma_e \ell e N}{4L} \text{ et } \sigma_e = \frac{4LP}{U^2 \ell e N}. \text{ Soit } \sigma_e = 50 \text{ S/m}.$$

$$\left( \sigma_e = \frac{4(0,48 \text{ m})(50 \text{ W})}{(230 \text{ V})^2 (9,5 \cdot 10^{-3} \text{ m})(1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m})38} \right)$$

$$\text{Si on compare cette conductivité à celle du cuivre : } \frac{\sigma_e}{\sigma_c} = 9 \cdot 10^{-7}$$

La conductivité de l'encre est très petite devant celle du cuivre.



29. Si l'on veut réaliser un dispositif analogue en cuivre, qui couvre de façon similaire la surface du miroir et qui permet de dissiper la même puissance, il faudrait que l'épaisseur des bandes soit  $e' = e \frac{\sigma_e}{\sigma_c} = 9 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

Cette épaisseur est de l'ordre de grandeur de la distance atomique, la théorie macroscopique de la conduction utilisée n'est pas valable. On peut toutefois conclure que des bandes de cuivre devraient être très peu épaisses : elles seraient difficiles à réaliser et très fragiles.

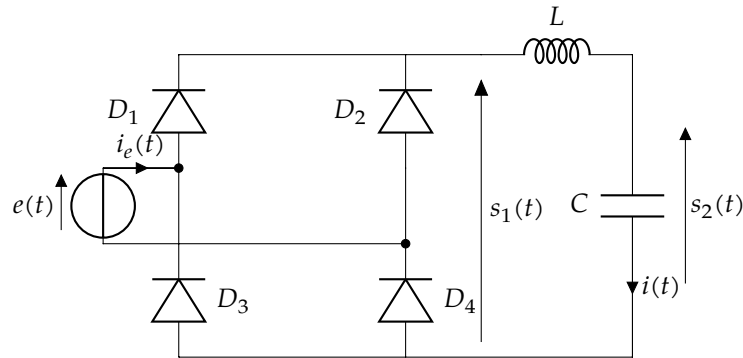


# IV Station de charge d'une brosse à dent électrique

## IV.A Conversion alternatif-continu

30.  $E$  est l'amplitude d'une tension de valeur efficace  $U = 230\text{ V}$  :  $E = \sqrt{2}U$ .  $E = 325\text{ V}$

31. Le montage de redressement double-alternance est :



Ce montage est absurde et ne doit pas être réalisé pour effectuer le redressement de la tension du secteur.

- Une approche qualitative simple permet de voir que le montage ne convient pas. Il s'agit d'un convertisseur direct et la source d'entrée est une source de tension alternative. La source de sortie doit donc se comporter comme une source de courant continu (au sens utilisé en électrotechnique, *i.e.* de valeur moyenne non-nulle.). Or le dipôle  $RC$  série ne se comporte pas comme une source de courant.

En effet, si un courant  $i(t)$  de valeur moyenne non-nulle traverse la charge  $LC$ , le condensateur se charge et la tension  $s_2$  augmente indéfiniment.

- Un raisonnement plus détaillé permet de trouver le point de fonctionnement de ce circuit en régime permanent.

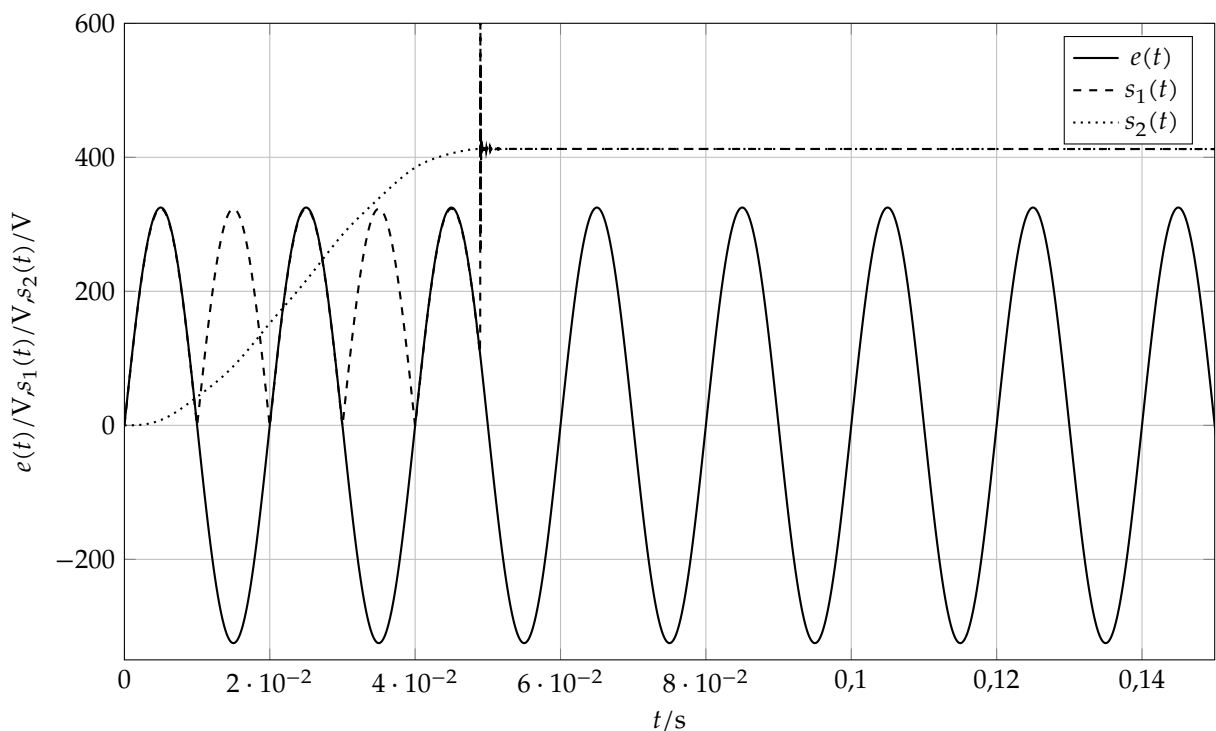
D'une part, la présence des quatre diodes idéales impose  $i(t) \geq 0$ .

D'autre part, l'impédance de la charge est  $Z(j\omega) = Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}$ . Donc  $|Z(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} +\infty$ . Ce qui implique que la valeur moyenne de  $i(t)$  est nulle :  $\langle i(t) \rangle = 0$ .

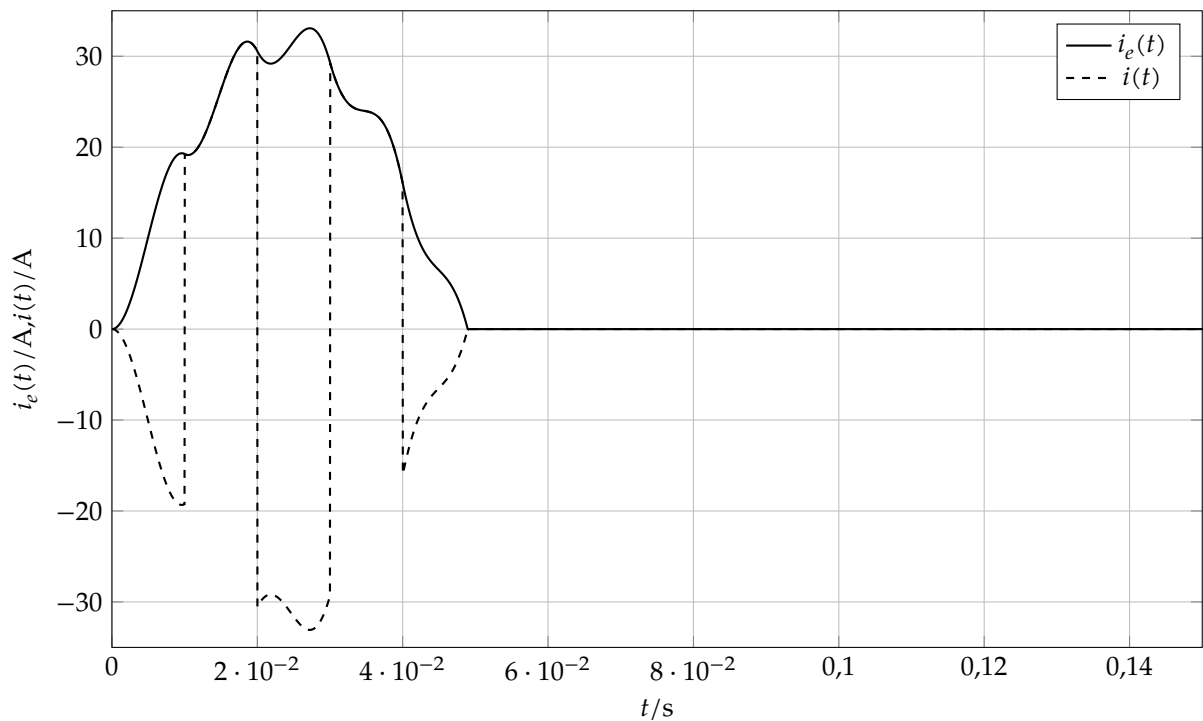
Donc, l'intensité dans la charge est nulle en régime permanent :  $i(t) = 0$ . Ce qui signifie que les quatre diodes sont bloquées.

- Un logiciel de simulation permet de voir le régime transitoire, pendant lequel les diodes changent d'état, et pour lequel

$\begin{cases} s_1(t) \approx |e(t)| \\ i(t) \geq 0 \end{cases}$ . Pendant cette phase, le condensateur se charge. Lorsque l'intensité  $i(t)$  s'annule, les quatre diodes se bloquent, le régime permanent décrit plus haut est atteint.



Les intensités dans la source d'entrée et la charge sont représentées sur le graphique ci-dessous.



En régime permanent, les intensités sont nulles dans la source d'entrée et dans la charge, il n'y a pas de transfert de puissance.

- Les trois questions suivantes ne sont pas pertinentes. Les réponses justes à ces questions sont :

32 :  $s_1$  est une tension continue, le spectre donné n'est pas correct. La valeur de la composante continue dépend de la valeur de la capacité qui n'est pas connue.

33 :  $s_1$  n'a pas de composante fondamentale.

34 :  $s_2$  est une tension continue, son taux d'ondulation est nul quelle que soit la valeur de  $C$ .

On attend toutefois des réponses fausses aux trois questions suivantes, les voici.

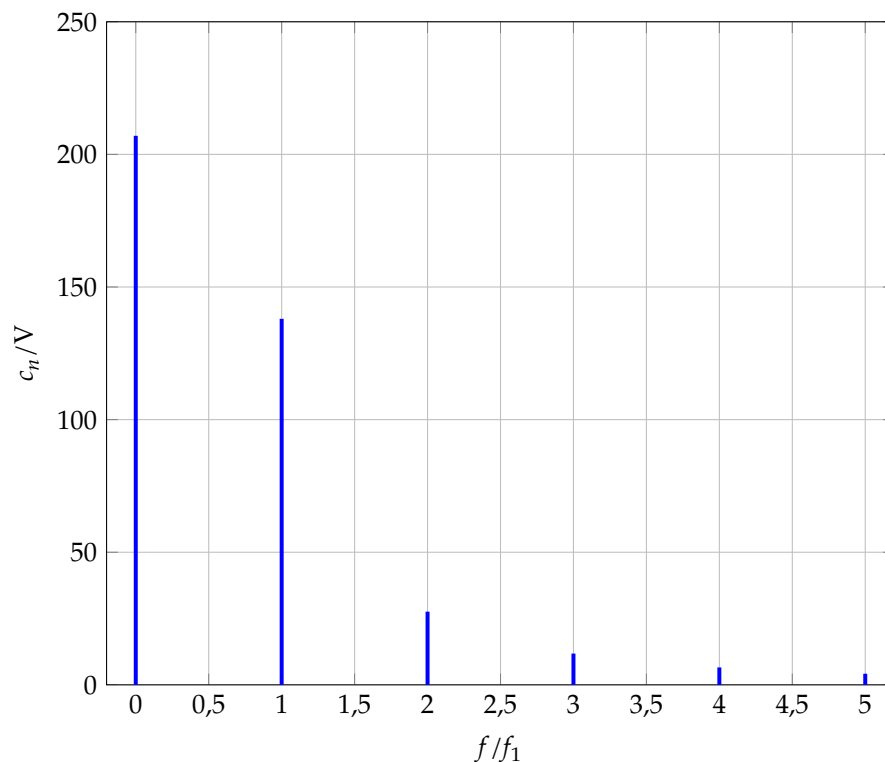
32. On admet que  $s_1(t) = |e(t)|$ , donc  $s_1(t) = E|\sin(\omega t)|$ . La composante continue de  $s_1$  est la valeur moyenne de  $s_1$  :  $c_0 = \frac{E}{T} \int_0^T |\sin(\omega t)| dt$  où  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Donc, la fonction étant de période  $\frac{T}{2}$  :  $c_0 = \frac{2E}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} |\sin(\omega t)| dt$

Donc  $c_0 = \frac{2E}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t) dt$ . Ce qui donne  $c_0 = \frac{2E}{\omega T} \left[ -\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) + 1 \right]$ .

Donc  $c_0 = \frac{2E}{\pi}$ . Soit  $c_0 = 207 \text{ V}$

Le spectre du signal est :



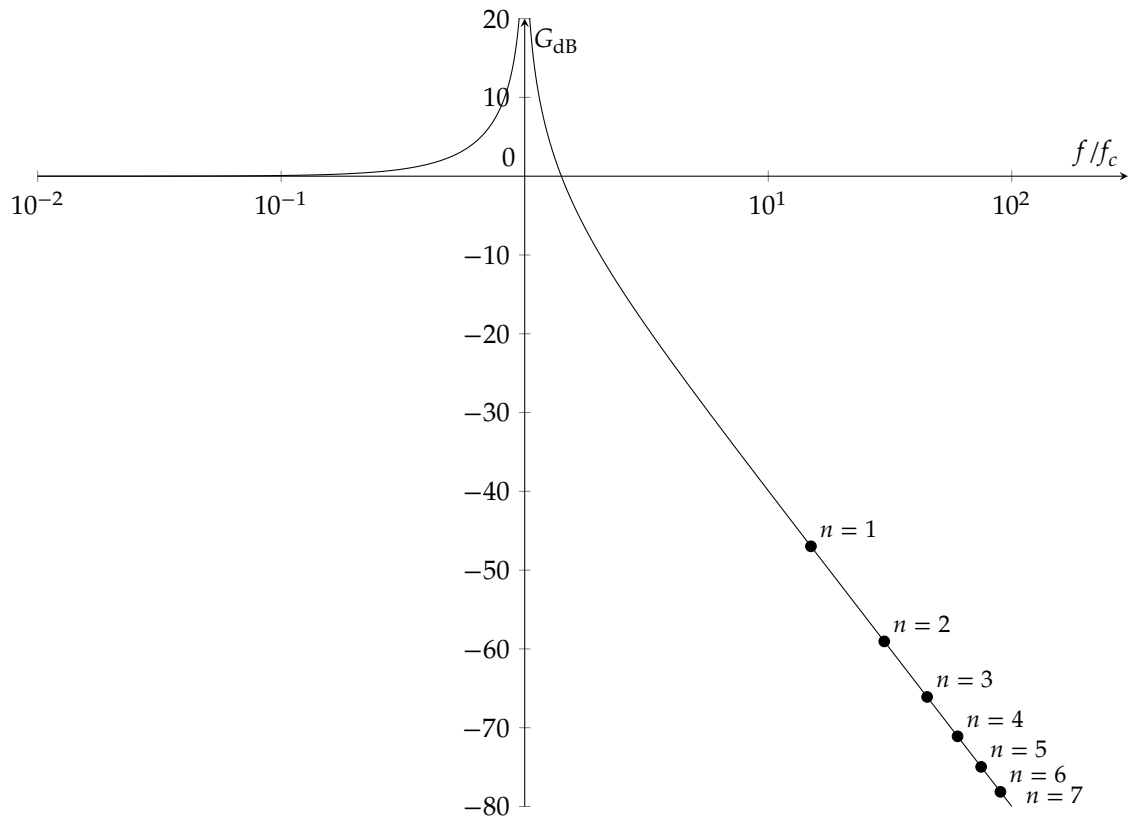
33. La fréquence de  $s_1(t)$  est  $f_1 = 100 \text{ Hz}$ .

34. La fonction de transfert du filtre est  $H(j\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2}$ . Il s'agit d'un filtre passe-bas du second ordre, avec une résonance infinie pour la fréquence  $f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ .

Le signal d'entrée est tel que 
$$\begin{cases} \langle s_1 \rangle = \frac{2E}{\pi} = 207 \text{ V} \\ \Delta s_1 = E = 325 \text{ V} \end{cases}$$

Le taux d'ondulation du signal d'entrée est donc  $\frac{\Delta s_1}{\langle s_1 \rangle} = 1,57$ .

Ce taux d'ondulation est très grand devant la valeur souhaitée, il faudra donc que le filtre atténue très fortement les harmoniques du signal. On peut donc supposer que toutes les harmoniques devront avoir des fréquences grandes devant la fréquence caractéristique  $f_c$ .



La gain en très basse fréquence est de 1 donc  $\langle s_2 \rangle = \langle s_1 \rangle$ .

Si toutes les harmoniques ont des fréquences supérieures à  $f_c$ , le montage a un comportement double-intégrateur pour la partie variable des signaux. On note 
$$\begin{cases} s_1(t) = \langle s_1 \rangle + \tilde{s}_1(t) \\ s_2(t) = \langle s_1 \rangle + \tilde{s}_2(t) \end{cases}$$

En notation complexe,  $[1 - LC\omega^2] \tilde{s}_2 = \tilde{s}_1$ . Ce qui se simplifie, si toutes les composantes sont dans le domaine double-intégrateur :  $-LC\omega^2 \tilde{s}_2 = \tilde{s}_1$ .

En notation réelle :  $LC \frac{d^2 \tilde{s}_2}{dt^2} = \tilde{s}_1(t)$ .

Pour  $0 < t < \frac{T_0}{2}$ ,  $\tilde{s}_1(t) = E \sin(\omega t) - \frac{2E}{\pi}$

De façon évidente, la solution de valeur moyenne nulle et de période  $\frac{T_0}{2}$  est :

$$\tilde{s}_2(t) = -\frac{E}{LC} \left[ \frac{1}{\omega^2} \left( \sin(\omega t) - \frac{2}{\pi} \right) + \frac{1}{\pi} \left[ t \left( t - \frac{T_0}{2} \right) - \frac{T_0^2}{2} \right] \right]$$

Et l'amplitude crête-à-crête est :

$$\Delta s_2 = \tilde{s}_2(0) - \tilde{s}_2\left(\frac{T_0}{4}\right)$$

$$\text{Donc : } \Delta s_2 = \frac{E}{LC} \left[ \frac{1}{\omega^2} \sin \frac{\omega T_0}{4} + \frac{T_0^2}{16\pi} \right]$$

Or  $\omega T_0 = 2\pi$ , donc  $\sin \frac{\omega T_0}{4} = 1$  et

$$\text{Donc } \Delta s_2 = \frac{ET_0^2}{16\pi^2 LC} (\pi + 4)$$

Le taux d'ondulation du signal de sortie est donc :  $\tau_2 = \Delta s_2 \frac{\pi}{2E}$ .

$$\text{Donc } \tau_2 = \frac{T_0^2(\pi + 4)}{32\pi LC}.$$

On note  $\tau_c = 5 \cdot 10^{-2}$  le taux limite. On souhaite  $\tau_2 < \tau_c$ .

$$\text{Donc } C > \frac{T_0^2(\pi + 4)}{32\pi L \tau_c}. \text{ Soit } C > 5,68 \text{ mF}$$

#### IV.B Conversion alternatif-continu

35. Les règles de fonctionnement sont les suivantes :

- $K_1$  et  $K_3$  ne doivent pas être fermés simultanément pour ne pas mettre  $E_0$  en court-circuit.
- $K_2$  et  $K_4$  ne doivent pas être fermés simultanément pour ne pas mettre  $E_0$  en court-circuit.
- $K_1$  et  $K_3$  ne doivent pas être ouverts simultanément pour ne pas mettre le charge inductive en circuit ouvert.
- $K_2$  et  $K_4$  ne doivent pas être ouverts simultanément pour ne pas mettre le charge inductive en circuit ouvert.

Il y a donc quatre états possibles pour les diodes. Comme on cherche un cycle de fonctionnement n'utilisant que deux de ces états, et que l'on veut que la valeur moyenne de  $u_1$  soit nulle, on propose le cycle suivant :

|                           | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | $u_1(t)$        |
|---------------------------|-------|-------|-------|-------|-----------------|
| $0 < t < \frac{T_0}{2}$   |       |       |       |       | $u_1(t) = E_0$  |
| $\frac{T_0}{2} < t < T_0$ |       |       |       |       | $u_1(t) = -E_0$ |

36. L'intensité dans la charge est donnée en notation complexe par  $[Lj\omega + r]i = u_1$ .

En tenant compte de la valeur de  $u_1$  :

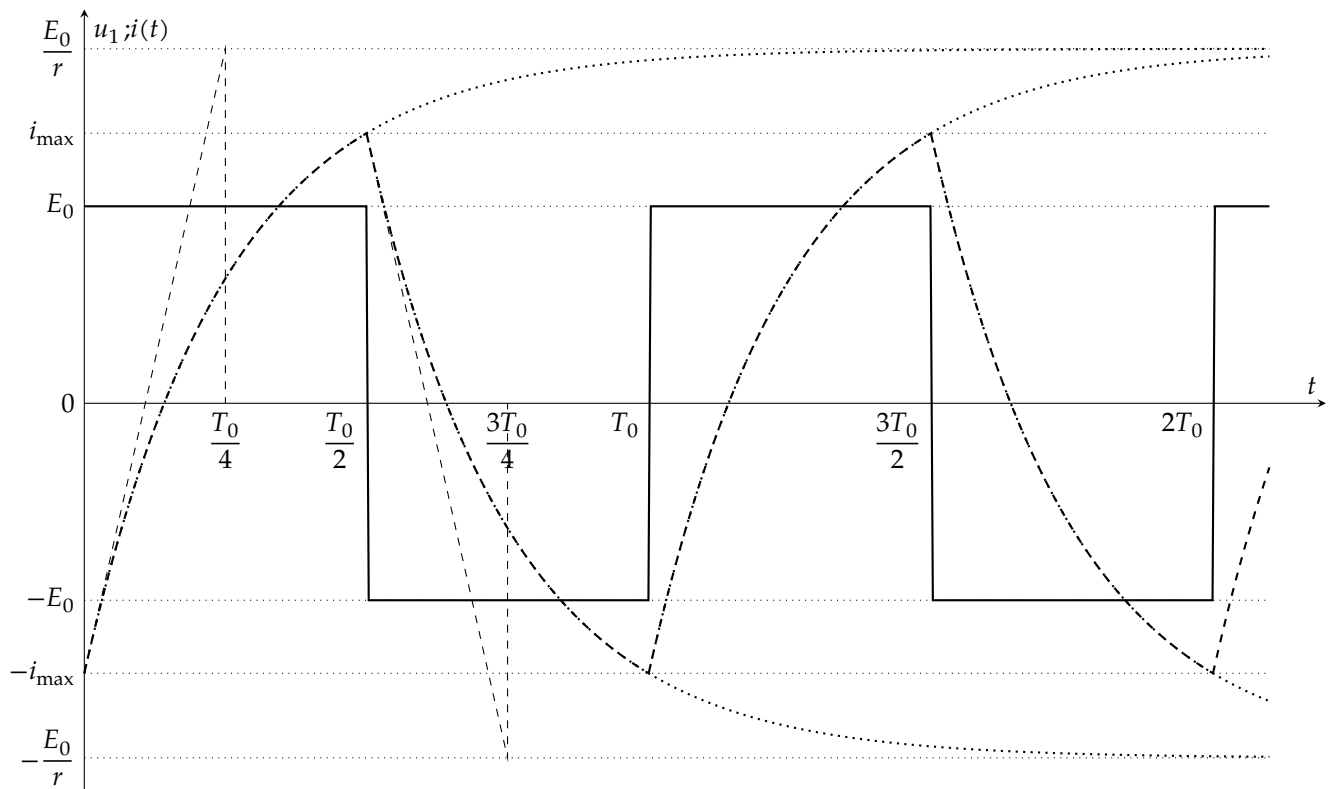
$$\begin{cases} \frac{di}{dt} + \frac{r}{L}i(t) = \frac{E}{L} & \text{pour } 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ \frac{di}{dt} + \frac{r}{L}i(t) = -\frac{E}{L} & \text{pour } \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$

37. Pour  $0 < t < \frac{T_0}{2}$ , la solution générale de l'équation différentielle est  $i(t) = ae^{-\frac{rt}{L}} + \frac{E}{r}$  où  $a$  est une constante d'intégration.

$$\text{Or } \begin{cases} i(0) = -i_{\max} \\ i(\frac{T_0}{2}) = i_{\max} \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} -i_{\max} - \frac{E}{r} = a \\ i_{\max} - \frac{E}{r} = ae^{-\frac{rT_0}{2L}} = a\alpha \end{cases}, \text{ et } i_{\max} - \frac{E}{r} = -\alpha \left( i_{\max} + \frac{E}{r} \right)$$

$$\text{Donc } i_{\max} = \frac{E}{r} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

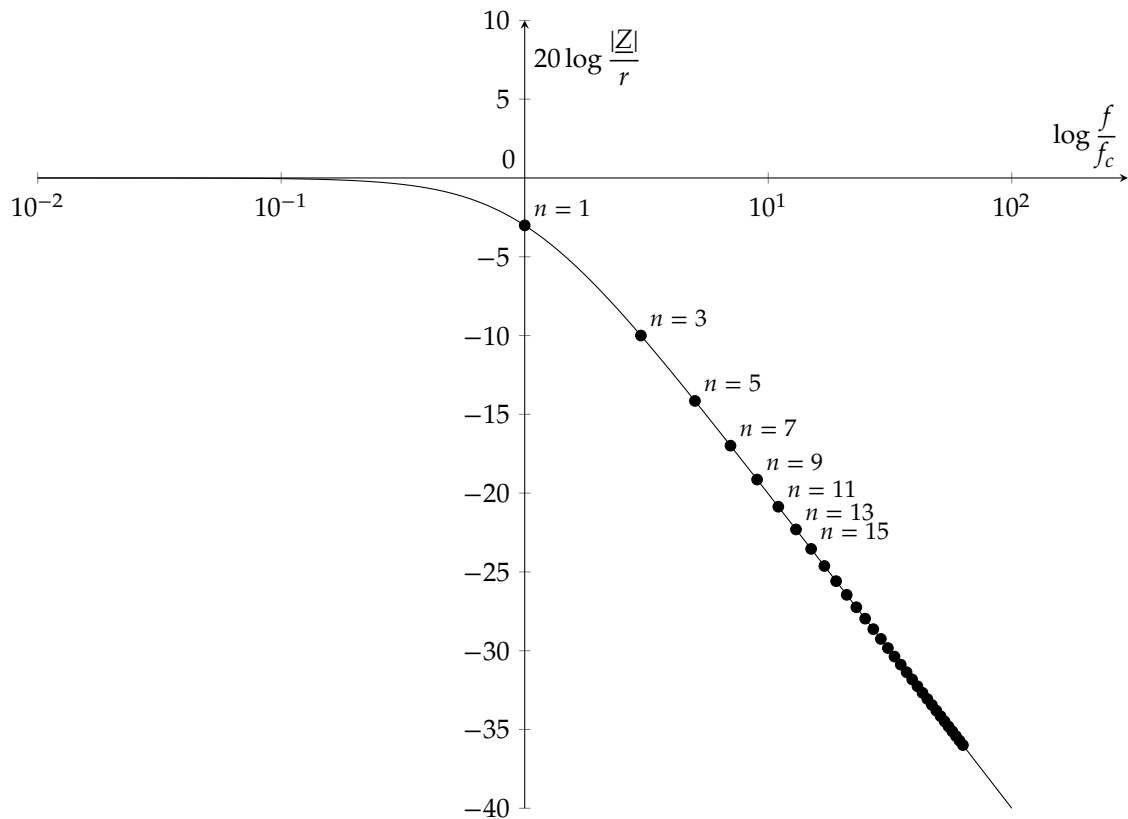
38. Le graphique représentant  $u_1(t)$  et  $i(t)$  est :



39. L'impédance de la branche  $(L, r)$  est  $Z(j\omega) = r + Lj\omega = \frac{u_1}{i}$ .

Donc  $\frac{ri}{u_1} = \frac{1}{1 + \frac{Lj\omega}{r}}$ .

Le montage se comporte comme un filtre passe-bas du premier ordre, de fréquence de coupure  $f_c = \frac{r}{2\pi L}$ .



Si on choisit  $f_0 \simeq f_c$ , le fondamental sera légèrement atténué, les harmoniques de rang 3, 5, 7, ...seront plus fortement atténués. Cette situation est un bon compromis :  $i(t)$  sera proche d'un signal sinusoïdal sans que son amplitude soit trop faible.

Il faut choisir les composants de telle sorte que  $\frac{r}{L} \simeq 2\pi f_0$ .

### IV.C Couplage par induction

40. On note :

- $i = 200$  mA le courant de charge ;
- $Q = 2$  Ah = 7,20 kC la charge totale ;
- $\eta = 0,70$  le rendement de l'opération de charge ;
- $\tau$  le temps nécessaire pour la charge.

Alors  $Q = \eta i \tau$ , et donc  $\tau = \frac{Q}{i\eta}$ .  $\tau = 5 \cdot 10^4$  s  $\tau = 14$  h

41. On compte 9 périodes sur 9,5 carreaux. La période est donc de 26  $\mu$ s environ et la fréquence est  $f = 37$  kHz.

La loi de FARADAY,  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$  montre que la force électromotrice induite est proportionnelle à la fréquence du signal inducteur.

Avec la fréquence utilisée, la force électromotrice induite sera environ huit-cent fois plus grande que celle obtenue avec un courant excitateur de fréquence 50 Hz.

42. Si la fréquence est trop grande, l'effet de peau va devenir important dans les conducteurs. Leur résistance équivalente augmente et les pertes par effet JOULE aussi.

Pour une fréquence  $f_1 = 37$  kHz, l'épaisseur de peau est  $\delta_1 = 3 \cdot 10^{-4}$  m.

Pour une fréquence  $f_2 = 1$  MHz, l'épaisseur de peau est  $\delta_2 = 6 \cdot 10^{-5}$  m.

Or, le rayon du fil est  $r = 2,2 \cdot 10^{-4}$  m. Dans le cas de la fréquence  $f_1$ , l'effet de peau sera faible, le courant induit sera réparti dans l'ensemble du conducteur.

Dans le cas de la fréquence  $f_2$ , seule une petite couche d'épaisseur  $\delta_2$  sera parcourue par un courant. L'effet de peau sera important, et les pertes par effet JOULE seront importantes.