

Centrale-Supélec 2022, filière PSI, épreuve de Physique-Chimie 2

Corrigé proposé par JPh Caniparoli ; contact (erreurs, ...) : artefact.act@wanadoo.fr
Merci à Bruno Martens qui a relevé et corrigé un certain nombre d'erreurs

I Pression et plongée

I.1 - Pression hydrostatique

Q1)

$$\rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}(P) = \vec{0}$$

Il s'agit de l'écriture de la condition d'équilibre (sous forme de forces volumiques) d'une particule fluide sous l'effet de la force de pesanteur (terme $\rho \vec{g}$) et de la résultante des forces de pression (terme $-\overrightarrow{\text{grad}} P$)

Q2) En projection sur l'axe z la relation précédente s'écrit $\rho g = \frac{dP}{dz}$ et s'intègre entre la surface ($z = 0, P_0$) et la profondeur z , dans l'hypothèse incompressible, en $P(z) - P_0 = \rho g z$, d'où le profil de pression affine :

$$P(z) = P_0 + \rho_0 g z$$

Q3) La définition du coefficient de compressibilité considère un volume fermé d'eau de caractéristiques uniformes, pour lequel on peut écrire $V = m/\rho$ avec m fixé. On peut alors écrire

$$\chi_T = \frac{-1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T = \frac{-\rho}{m} \frac{\partial(m/\rho)}{\partial P} \Big|_{T,m} = -\rho \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{1}{\rho} \right) \Big|_T = -\frac{-\rho}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_T$$

Q4) Pour une variation infinitésimale et isotherme de profondeur, la loi de la statique des fluides s'écrit $dP = \rho g dz$, tandis que la définition de la compressibilité donne $dP = d\rho/(\rho \chi_T)$, d'où la relation différentielle $\rho g dz = d\rho/(\rho \chi_T)$, que l'on peut intégrer entre $z = 0$ et la profondeur z , dans l'hypothèse où χ_T est constant :

$$\frac{d\rho}{\rho^2} = \chi_T g dz \rightarrow \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho(z)} = \chi_T g z : \frac{1}{\rho(z)} = \frac{1}{\rho_0} - \chi_T g z = \frac{1 - \rho_0 \chi_T g z}{\rho_0}$$

soit finalement

$$\rho(z) = \frac{\rho_0}{1 - \rho_0 \chi_T g z}$$

Q5) On reporte l'expression précédente dans la loi de l'hydrostatique :

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\rho_0 g dz}{1 - \rho_0 \chi_T g z} = \frac{1}{\chi_T} \frac{\rho_0 \chi_T g dz}{1 - \rho_0 \chi_T g z} = \frac{1}{\chi_T} \frac{-d(1 - \rho_0 \chi_T g z)}{1 - \rho_0 \chi_T g z} = -\frac{1}{\chi_T} d(\ln(1 - \rho_0 \chi_T g z))$$

Nouvelle équation différentielle à variables séparées que l'on intègre entre la surface et la profondeur z :

$$P(z) - P(0) = \frac{-1}{\chi_T} \ln(1 - \rho_0 \chi_T g z) \rightarrow P(z) = P(0) - \frac{1}{\chi_T} \ln(1 - \rho_0 \chi_T g z)$$

Q6) Le modèle incompressible donne

$$P(h) = 1 \times 10^5 + 1020 \times 9,81 \times 10900 = 1,09 \times 10^8 \text{ Pa}$$

Le modèle à compressibilité uniforme donne $P(h) = 1,12 \times 10^8 \text{ Pa}$ qui permet de prévoir la pression au fond de la fosse des Mariannes à 1% près au lieu de 4% près pour le modèle incompressible. Si on souhaite une meilleure pression, il faudrait tenir compte des profils de température et de salinité en fonction de la profondeur, qui influence le profil de masse volumique.

1.2 - Plongée et remontée

Q7) Le sous-marin est soumis à la descente comme à la remontée :

- à son poids, différent à la descente et à la remontée du fait de l'abandon du ballast ;
- à la poussée d'Archimède ;
- à la force hydrodynamique

L'énoncé indique que la descente et la remontée se font à vitesses quasi-constantes (on néglige les phases d'accélération et de décélération), et la relation

$$\rho(z) = \frac{\rho_0}{1 - \rho_0 \chi_T g z}$$

conduit à une augmentation relative de ρ de 5% entre la surface et le fond de la fosse des Mariannes, ce qui suggère de se placer dans l'hypothèse incompressible : $\rho(z) = \rho_0$. La seconde loi de Newton en projection selon la verticale descendante s'écrit dans chacune des phases, dans ces approximations, en utilisant l'indice d pour la descente et r pour la montée :

$$0 = m_d g - V_d \rho_0 g - \frac{C_{x,d}}{2} \rho_0 v_d^2 S_d ; 0 = m_r g - V_r \rho_0 g + \frac{C_{x,r}}{2} \rho_0 v_r^2 S_r$$

où

$$v_d = \frac{H}{t_d} ; v_r = \frac{H}{t_r}$$

La différence de signe pour la force hydrodynamique entre la descente et la remontée est lié au changement de sens du mouvement, donc de la force hydrodynamique. Ces deux relations s'interprètent en considérant que la force motrice constante lors d'une phase, résultante de la force de pesanteur et de la poussée d'Archimède, doit être compensée en régime stationnaire par la force hydrodynamique, dépendant de la vitesse.

Par différence, on obtient la relation

$$m_d - m_r = \rho_0 \left(V_d - V_r + \frac{1}{2g} (C_{x,d} v_d^2 S_d + C_{x,r} v_r^2 S_r) \right)$$

Les grandeurs géométriques V et S et le coefficient C_x dépendent de la géométrie du sous-marin, donc de la manière dont est abandonné le ballast :

- si le ballast est externe au sous-marin, son abandon se traduit par une variation de la masse du sous-marin égale à $\Delta m = m_r - m_d = -m_{\text{ballast}}$, mais à une modification des facteurs géométriques, en particulier V , qui peut être minimisée si la masse volumique du ballast est élevée par rapport à la masse volumique moyenne du sous-marin. Le placement du ballast sous le sous-marin permet de rendre négligeable la variation de la surface du maître-couple S et de C_x ;
- si le ballast est interne au sous-marin, son abandon se fait sans variation de V , S et C_x , mais dans ce cas il faudrait connaître la nature du matériau qui remplace le ballast (eau ou air) pour en tenir compte dans le calcul de la variation de masse, égale à $\Delta m = m' - m_{\text{ballast}}$ où m' est la masse qui remplace le ballast. S'il s'agit d'air (résultant par exemple du renouvellement de l'air dans la partie habitable), son influence est négligeable, s'il s'agit d'eau il faudrait en tenir compte car sa masse volumique n'est pas négligeable devant celle du ballast ($\rho_{\text{Fer}} \approx 8\rho_0$).

En l'absence de données, on fait l'approximation que l'abandon du ballast se fait sans variation de la géométrie, et que la variation de masse est uniquement due à la masse du ballast abandonné. L'équation se simplifie en

$$m_{\text{ballast}} = m_d - m_r = \frac{\rho_0 C_x S}{2g} (v_d^2 + v_r^2) = \frac{\rho_0 C_x S H^2}{2g} \left(\frac{1}{t_d^2} + \frac{1}{t_r^2} \right)$$

L'énoncé donne $h = 10,9$ km, $H_{DC} = 7,30$ m, $D_{DC} = 2,11$ m, soit en assimilant le sous-marin à un cylindre se déplaçant parallèlement à sa hauteur, $S = \frac{\pi D_{DC}^2}{4} = 3,50$ m², et d'après la table de la figure 2, $L/D = 3,46 \approx 4$, soit $C_x \approx 0,87$. On calcule alors

$$m_{\text{ballast}} = \frac{1,02 \times 10^3 \times 0,87 \times 3,5 \times 10900}{2 \times 9,81 \times 60^2} \times \left(\frac{1}{150^2} + \frac{1}{70^2} \right)$$

$$\frac{\rho_0 C_x S H^2}{2g} \left(\frac{1}{t_d^2} + \frac{1}{t_r^2} \right) = 1300 \text{ kg}$$

II Risque d'hypoxie

Q8) L'air est approximativement composé en moyenne de 80% de diazote, 20% de dioxygène, les autres gaz étant largement minoritaires.

Q9) On suppose que l'air se comporte comme un gaz parfait, que la température et la concentration de dioxygène sont uniformes dans l'habitacle, et que la température est également uniforme. L'énoncé indique en outre que l'oxygène utilisé est remplacé par la même quantité de dioxyde de carbone, donc le nombre de moles gazeuses dans l'habitacle est constante, de même à température et volume constants que la pression.

Après la i -ème inspiration, le volume V de l'habitacle contient n_i moles de dioxygène, donc la quantité de dioxygène inspiré lors de la $(i + 1)$ -ème inspiration vaut

$$n_{\text{inspiré}} = n_i \frac{V_p}{V}$$

où V_p est le volume inspiré. Seul un quart de cette quantité est utilisé par les poumons et transformé en dioxyde de carbone, le reste étant exhalé, donc la quantité de dioxygène restant

dans l'habitacle après cette respiration vaut, en l'absence de production de dioxygène lors d'une panne du système de production :

$$n_{i+1} = n_i - \frac{n_{\text{inspiré}}}{4} = n_i \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)$$

Soit en appliquant la loi du gaz parfait, dans l'hypothèse d'une température constante dans l'habitacle

$$P_{\text{O}_2, i+1} = \frac{n_{i+1}RT}{V} = n_i \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right) \frac{RT}{V} = P_{\text{O}_2, i} \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)$$

Les pressions partielles $P_{\text{O}_2, i}$ forment donc une suite géométrique de raison $r = \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right) < 1$, d'où

$$P_{\text{O}_2, i} = P_{\text{O}_2, 0} \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)^i$$

Q10) Le nombre n d'inspirations possibles d'air respirable vérifie $P_{\text{O}_2, n} \leq P_{\text{O}_2, \ell}$, soit

$$P_{\text{O}_2, 0} \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)^n \leq P_{\text{O}_2, \ell}$$

En passant au logarithme on obtient la relation

$$n \ln \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right) \leq \ln \left(\frac{P_{\text{O}_2, \ell}}{P_{\text{O}_2, 0}}\right)$$

Le nombre maximal de respirations vaut

$$n_{\text{max}} = E \left(\frac{\ln \left(\frac{P_{\text{O}_2, \ell}}{P_{\text{O}_2, 0}}\right)}{\ln \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)} \right)$$

On calcule la pression partielle de dioxygène à la surface libre $P_{\text{O}_2, 0} = x_{\text{O}_2, 0}P_0 = 0,2P_0 = 2 \times 10^4 \text{ bar}$, le volume de la partie habitable assimilée à une sphère de diamètre $D = 1,09 \text{ m}$, $V = \pi D^3/6 = 0,678 \text{ m}^3$, et enfin

$$n_{\text{max}} = E \left(\frac{\ln(8,0 \times 10^3 / 2 \times 10^4)}{\ln(1 - 0,5 \times 10^{-3} / (4 \times 0,678))} \right) = 4,97 \times 10^3$$

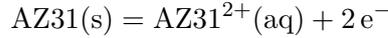
En supposant que la fréquence de la respiration reste constante, la durée maximale de respiration vaut

$$\tau = \frac{n_{\text{max}}}{f} = \frac{4,97 \times 10^3}{0,25} \approx 2,0 \times 10^4 \text{ s} = 5,5 \text{ h}$$

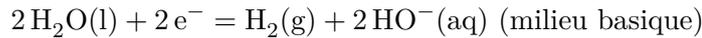
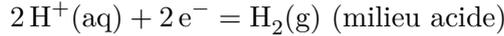
Cette valeur donne une estimation du temps de survie en cas de panne du système de contrôle de l'atmosphère. Ce temps présente sans doute des variations liées à la physiologie et à la psychologie du pilote (modification de la respiration par rapport au signai d'alarme physiologique associé à la concentration de monoxyde de carbone, modification de l'utilisation du dioxygène par l'organisme en cas d'hypoxie, ...)

III Système de libération du ballast

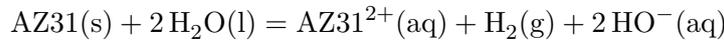
- Q11)** Les courbes intensité-potentiel données montrent que
 — le barreau cylindrique d’AZ31 s’oxyde en $AZ31^{2+}$ selon la demi-réaction



- l’eau est réduite en dihydrogène à la surface des anneaux en nickel, d’où le dégagement gazeux (principe de la pile de corrosion, l’oxydation et la réduction sont séparées géographiquement) selon la demi-réaction (écrite successivement en milieu acide puis en milieu neutre ou basique qui correspond mieux à l’eau de mer)



soit l’équation-bilan



correspondant à l’échange de 2 électrons.

- Q12)** L’avancement maximal ξ_{\max} correspondant à la corrosion complète de la tige selon l’équation-bilan précédente a pour expression

$$\xi_{\max} = n(AZ31) = \frac{\rho(AZ31)V_{\text{tige}}}{\mathcal{M}(AZ31)} = \frac{\rho(AZ31)\pi r_{\text{tige}}^2 L_{\text{tige}}}{\mathcal{M}(AZ31)}$$

- Q13)** À l’instant initial, l’aire de la tige en contact avec l’eau s’écrit, en négligeant les effets de bord (la géométrie du raccord anneau/tige n’est pas simple d’autant que le rayon de la tige est plus grand que le rayon des anneaux), $S_0 = 2\pi r_{\text{tige}} L_{\text{tige}}$, soit un courant de corrosion

$$i_{\text{corr}} = S_0 j_{AZ31} = 2\pi r_{\text{tige}} L_{\text{tige}} j_{AZ31}$$

- Q14)** Dans un premier temps, on néglige la diminution de l’aire de la tige en contact avec l’eau causée par la corrosion, qui entraîne la diminution de rayon de la tige. L’énoncé suggère cette approximation puisque la question suivante prend en compte cette diminution.

À l’instant initial on relève sur le schéma de la goupille les dimensions suivantes :

- anneaux : rayon moyen $R = 0,885$ cm, rayon de la section $r = 0,14$ cm, surface totale des deux anneaux : $S_{\text{anneaux}} = 8\pi^2 r R = 9,8$ cm²

- tige : rayon $r_{\text{tige}} = 0,19$ cm, longueur $L_{\text{tige}} = 1,5$ cm, surface latérale $S_{\text{tige}} = 2\pi r_{\text{tige}} L_{\text{tige}} = 1,8$ cm², section $\pi r_{\text{tige}}^2 = 0,11$ cm², volume : $V_{\text{tige}} = \pi r_{\text{tige}}^2 L_{\text{tige}} = 0,17$ cm³

La corrosion se fait pour une différence de potentiel nulle entre les deux métaux (en court-circuit, la résistance de l’électrolyte étant négligée), pour des courants d’électrode opposés (conservation du courant), soit la relation

$$i_{\text{corr}} = 2\pi r_{\text{tige}} L_{\text{tige}} j_{AZ31} = S_{\text{anneaux}} |j_{\text{cathode}}|$$

d’où à l’instant initial

$$\frac{j_{AZ31}}{-j_{\text{cathode}}} = \frac{S_{\text{anneaux}}}{S_{\text{tige}}} = \frac{9,8}{1,8} = 5,4$$

En utilisant le graphique, on trouve pour un potentiel de corrosion $E = -600 \text{ mV}$, $j_{\text{cathode}} = -0,0075 \text{ A} \cdot \text{cm}^{-2}$, $j_{\text{AZ31}} = 0,034 \text{ A} \cdot \text{cm}^{-2}$, soit un rapport $\frac{j_{\text{AZ31}}}{j_{\text{cathode}}} \approx 4,5$: on en déduit qu'initialement le potentiel de corrosion est légèrement supérieur à -600 mV , et correspond à une intensité de corrosion approximative, calculée à partir des données sur les anneaux (la pente de la courbe est plus faible, donc moins sensible aux écarts sur le potentiel de corrosion), égale à

$$j_{\text{cathode}} S_{\text{anneaux}} \approx 0,7 \times 9,8 = 0,07 \text{ A}$$

L'avancement maximal de la réaction vaut

$$\xi_{\text{max}} = \frac{\rho(\text{AZ31}) \pi r_{\text{tige}}^2 L_{\text{tige}}}{\mathcal{M}(\text{AZ31})} = 1,2 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

pour une équation bilan mettant en jeu deux électrons, donc la durée de corrosion complète de la tige a pour expression, en supposant négligeable l'influence de la surface de la tige

$$\tau = \frac{2\mathcal{F}\xi_{\text{max}}}{I} = 33,4 \times 10^4 \text{ s} = 9,3 \text{ h}$$

L'ordre de grandeur obtenu (9h20) est naturellement supérieur à la durée de descente (2h30), et permet une durée d'exploration du fond marin d'environ 7 heures.

Q15) Au fur et à mesure de la corrosion de la tige, sa surface latérale diminue, tandis que celle des anneaux reste constante. D'après la relation traduisant la conservation de la charge le rapport $j_{\text{AZ31}}/|j_{\text{cathode}}| = S_{\text{cathode}}/S_{\text{tige}}$ doit augmenter au cours de la corrosion, ce qui se correspond d'après les courbes courant-potentiel par une augmentation de AZ31 et une diminution de $|j_{\text{cathode}}|$. Donc la surface des anneaux restant constante, le courant de corrosion $i_{\text{corr}} = |j_{\text{cathode}}| S_{\text{anneaux}}$ diminue au cours de la corrosion. On en déduit que le temps nécessaire à la corrosion complète de la tige est supérieur au temps calculé dans la question précédente.

Cependant la rupture de la tige se produit vraisemblablement avant sa corrosion totale : il est difficile de conclure sans autres données.

IV Communication

IV.1 - Communication par ondes radio dans l'eau de mer

Q16)

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

Q17) Équation locale de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

La loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, dans l'eau de caractéristiques supposées uniformes donne

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\gamma \vec{E}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \text{div} \vec{E}$$

et enfin en utilisant la loi de Maxwell-Gauss dans l'eau

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \frac{\rho}{\epsilon} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} ; \tau = \frac{\epsilon}{\gamma}$$

Q18)

$$\tau = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\gamma} = \frac{75 \times 8,85 \times 10^{-12}}{5} = 1,33 \times 10^{-10} \text{ s}$$

la période d'une onde de fréquence $f = 1 \text{ MHz}$ vaut $T = 1 \times 10^{-6} \text{ s} \gg \tau$. L'équation différentielle vérifiée en tout point par la densité volumique de charge a pour solution

$$\rho(t, M) = \rho(0, M)e^{-t/\tau}$$

donc suite à une perturbation la charge volumique s'annule avec une constante de temps τ très faible devant la période de l'onde : on peut donc considérer qu'à tout instant la densité volumique de charge est nulle.

On peut également remarquer qu'une densité volumique de charge en régime établi de la forme $\rho = \rho_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$ vérifie nécessairement $\rho_0 = 0$: en régime établi à la fréquence f la charge volumique est nulle.

Q19) équation de Maxwell-Ampère

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\gamma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

— courant de conduction : $\gamma \vec{E}$

— courant de déplacement $\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

En ordre de grandeur pour des phénomènes de pulsation ω

$$\frac{\epsilon \left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\left\| \gamma \vec{E} \right\|} = \frac{\epsilon \omega \left\| \vec{E} \right\|}{\gamma \left\| \vec{E} \right\|} = \frac{\epsilon \omega}{\gamma}$$

Par conséquent le courant de déplacement devient supérieur au courant de conduction si

$$\omega > \omega_c = \frac{\gamma}{\epsilon} = \frac{1}{\tau} = 7,5 \times 10^9 \text{ rad s}^{-1}$$

Q20) Si $\omega \ll \omega_c$, le terme de courant de déplacement est négligeable devant le terme de courant de conduction, et l'équation de Maxwell-Ampère se simplifie en

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}$$

L'équation de Maxwell-Faraday conduit à la relation

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \vec{\Delta} \vec{E} = \vec{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial(\vec{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t}$$

L'équation de Maxwell-Gauss dans le conducteur $\text{div} \vec{E} = \rho/\epsilon = 0$ et l'équation de Maxwell-Ampère simplifiée conduisent, en supposant la conductivité du milieu indépendante du temps, à la relation

$$-\vec{\Delta} \vec{E} = -\frac{\partial(\mu_0 \gamma \vec{E})}{\partial t} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Soit l'équation de diffusion du champ électrique

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \gamma} \vec{\Delta} \vec{E} = D \vec{\Delta} \vec{E}$$

Q21) Pour l'onde électromagnétique donnée dans l'énoncé

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E} ; \vec{\Delta} \vec{E} = -\underline{k}^2 \vec{E}$$

On reporte ces expressions dans l'équation de diffusion

$$i\omega \vec{E} = -\frac{\underline{k}^2}{\mu_0 \gamma} \vec{E}$$

d'où la relation de dispersion ($\vec{E} \neq \vec{0}$)

$$\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma \omega = e^{-i\pi/2} \mu_0 \gamma \omega$$

On en déduit

$$\underline{k} = \pm e^{-i\pi/4} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} = \pm (1-i) \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}} = \pm \frac{1-i}{\delta}$$

L'onde se propageant selon les z croissants, on ne conserve que la racine de partie réelle positive :

$$\underline{k} = \frac{1-i}{\delta}$$

Pour $f = 1,0$ MHz, $\gamma = 5$ S m⁻¹ et $\mu_0 = 12,6 \times 10^{-7}$ H · m⁻¹

$$\delta = 22$$
 cm

Q22) L'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ s'écrit pour l'onde électromagnétique en notation complexe, en notant que le vecteur d'onde $\underline{k} = \underline{k} \vec{e}_z$

$$-i \underline{k} \wedge \vec{E} = -\omega \vec{B} ; \vec{B} = \frac{\underline{k} \vec{e}_z \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\underline{k}}{\omega} E_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}z)) \vec{e}_y = \frac{1-i}{\delta \omega} E_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}z)) \vec{e}_y$$

Le calcul du vecteur de Poynting (grandeur quadratique) nécessite le passage en notation réelle. Comme le terme de propagation s'écrit

$$\exp(i(\omega t - \underline{k}z)) = \exp\left(i\left(\omega t - \frac{(1-i)z}{\delta}\right)\right) = \exp\left(\frac{-z}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right)$$

les champs réels ont pour expressions

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(\frac{-z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{e}_x$$

$$\vec{B} = \frac{E_0 \sqrt{2}}{\delta \omega} \exp\left(\frac{-z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_y = \frac{E_0}{\delta \omega} \exp\left(\frac{-z}{\delta}\right) \left(\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{e}_y$$

par conséquent

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\sqrt{2} E_0^2}{\mu_0 \delta \omega} \exp\left(\frac{-2z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_z = \dots$$

$$\dots \frac{E_0^2}{\mu_0 \delta \omega} \exp\left(\frac{-2z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \left(\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{e}_z$$

puis

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \frac{E_0^2}{\mu_0 \delta \omega} \exp\left(\frac{-2z}{\delta}\right) \vec{e}_z = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \delta \omega} \exp\left(\frac{-2z}{\delta}\right) \vec{e}_z$$

Q23) D'après la relation précédente

$$\left\| \left\langle \vec{\Pi}(z, t) \right\rangle \right\| = \frac{E_0^2}{2\mu_0\delta\omega} \exp\left(\frac{-2z}{\delta}\right)$$

donc

$$\frac{\left\| \left\langle \vec{\Pi}(z, t) \right\rangle \right\|}{\left\| \left\langle \vec{\Pi}(z + L, t) \right\rangle \right\|} = \frac{\exp(-2(z + L)/\delta)}{\exp(-2z/\delta)} = \exp\left(\frac{-2L}{\delta}\right)$$

avec $\delta = 0,22 \text{ m}$ et $L = 10 \text{ m}$, on obtient

$$\frac{\left\| \left\langle \vec{\Pi}(z, t) \right\rangle \right\|}{\left\| \left\langle \vec{\Pi}(z + L, t) \right\rangle \right\|} = \exp(-91) = 3 \times 10^{-40}$$

Q24) L'application numérique précédente montre qu'il est irréaliste d'envisager la communication avec le sous-marin par ondes électromagnétiques, à cause de l'atténuation très rapide de l'amplitude de ces ondes avec la distance de propagation dans la mer.

IV.2 - Communication par ondes acoustiques

2.1) Équation de propagation de l'onde acoustique

Q25) Dans l'approximation acoustique :

- les modifications des champs au repos par l'onde acoustique sont considérées comme des petites perturbations (perturbation du premier ordre) ce qui permet de linéariser les équations physiques par rapport à ces perturbations
- la vitesse particulaire est faible devant la célérité de l'onde, ce qui permet de négliger l'accélération convective dans le calcul de l'accélération des particules de fluide

On suppose d'autre part que l'évolution d'une particule fluide est adiabatique et réversible, donc isentropique, le fluide étant supposé parfait.

Q26)

- équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

- équation d'Euler (principe fondamental de la dynamique pour une particule fluide soumise aux seules forces de pression, en projection sur l'axe z)

$$\rho \vec{a} = -\overrightarrow{\text{grad}} P \rightarrow \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

- compressibilité du fluide en évolution isentropique

$$\chi_S = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_S \rightarrow \chi_{S0} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\mu}{p}$$

Q27) L'expression de la compressibilité isentropique permet d'exprimer μ

$$\mu = \rho_0 \chi_{S0} p$$

soit en reportant dans l'équation de conservation de la masse une équation couplée entre p et v

$$\rho_0 \chi_{S0} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

L'équation d'Euler linéarisée constitue une seconde équation couplée entre p et v , qui conduit à l'équation vérifiée par la surpression acoustique

— dérivation par rapport au temps de l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 \chi_{S0} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \rightarrow \rho_0 \chi_{S0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} = 0$$

— dérivation par rapport à z de l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0 \rightarrow \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0$$

— utilisation du théorème de Schwartz

$$\rho_0 \chi_{S0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0$$

Q28) On obtient une équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \rho_0 \chi_{S0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

de célérité

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_{S0}}}$$

Pour l'eau de mer, $\rho_0 = 1,02 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\chi_S = 4,10 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$, et

$$c_0 = 1,55 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2.2) Relation de passage à l'interface d'un milieu stratifié

Q29) La norme du vecteur d'onde ne dépend que du milieu de propagation, identique pour l'onde incidente et l'onde réfléchie, donc $\|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}_r\|$.

$$k_i = \frac{\omega}{c_1} ; k_t = \frac{\omega}{c_2}$$

Q30) La continuité de la pression à l'interface $P(x, y, 0^-, t) = P(x, y, 0^+, t)$ s'écrit $P_0 + p_i(x, y, 0^-, t) + p_r(x, y, 0^-, t) = P_0 + p_t(x, y, 0^-, t)$, soit en exprimant les surpressions et en passant en notation complexe

$$\underline{p}_{i0} \exp\left(i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OP})\right) + \underline{p}_{r0} \exp\left(i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{OP})\right) = \underline{p}_{t0} \exp\left(i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{OP})\right)$$

puis, après division par le facteur $\exp\left(i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OP})\right)$

$$\underline{p}_{i0} + \underline{p}_{r0} \exp\left(i(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{OP}\right) = \underline{p}_{t0} \exp\left(i(\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{OP}\right)$$

Q31) Les fonctions exponentielles étant linéairement indépendantes, la relation précédente est vérifiée pour \underline{p}_{i0} , \underline{p}_{r0} et \underline{p}_{t0} non nuls et un point P de l'interface arbitraire si ces fonctions sont identiques, donc si leurs arguments le sont :

$$0 = (\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{OP} = (\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{OP}$$

en notant que $1 = \exp(0)$

Q32) On exprime les vecteurs d'onde et le vecteur $\vec{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ dans les relations précédentes :

$$(k_{i,x} - k_{r,x})x - k_{r,y}y = 0 ; (k_{i,x} - k_{t,x})x - k_{t,y}y = 0$$

Ces relations doivent être vérifiées pour tout x et y , d'où les relations

$$k_{r,y} = k_{t,y} = 0 ; k_{r,x} = k_{t,x} = k_{i,x}$$

Les vecteurs d'onde des ondes réfléchiée et transmise sont contenus dans le plan d'incidence (\vec{k}_i, \vec{e}_z) car leurs composantes selon \vec{e}_y sont nulles

D'après la figure 5

$$k_{i,x} = k_i \sin \theta_i = \frac{\omega}{c_1} \sin \theta_i ; k_{r,x} = k_r \sin(\pi + \theta_r) = -\frac{\omega}{c_1} \sin \theta_r ; k_{t,x} = k_t \sin \theta_t = \frac{\omega}{c_2} \sin \theta_t$$

d'où les relations

$$\sin \theta_i = -\sin \theta_r : \theta_r = -\theta_i ; \frac{\sin \theta_t}{c_2} = \frac{\sin \theta_i}{c_1}$$

Qui constituent les lois de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction.

2.3) Propagation d'une onde acoustique dans un milieu inhomogène

Q33) La grandeur $\sin(\theta(z))/c(z)$ se conserve au cours de la propagation, où θ représente l'angle entre la verticale (normale aux plans horizontaux interfaces entre les couches stratifiées) et le rayon acoustique.

Q34) Quand l'angle est émis quasi verticalement ($\theta_0 \ll 1$), et que la vitesse est une fonction croissante de la profondeur z , la relation de conservation qui s'écrit

$$\sin \theta(z) = \sin \theta_0 \frac{c(z)}{n_0}$$

entraîne que $\sin \theta(z)$ est une fonction croissante de la profondeur : les rayons s'écartent progressivement de la verticale. Ils restent confondus avec la verticale s'ils sont émis exactement selon la verticale.

Q35) D'après la relation de conservation précédente, $\sin \theta$ et θ atteignent leurs valeurs maximales à la profondeur à laquelle la célérité est maximale. Pour la fosse des Mariannes cette profondeur correspond au fond de la fosse, donc pour atteindre ce point, il faut vérifier la relation

$$\frac{\sin \theta_0}{c_0} = \frac{\sin \theta(z_{\max})}{c(z_{\max})} \leq \frac{1}{c(z_{\max})}$$

soit, puisque sinus est une fonction croissante entre 0 et $\pi/2$, la condition sur l'angle d'émission

$$\theta_0 \leq \arcsin \left(\frac{c_0}{c(z_{\max})} \right) = \arcsin \left(\frac{1545}{1650} \right) = 69,45^\circ$$

Q36) Dans le triangle rectangle formé par une longueur élémentaire de rayon d'angle θ avec la verticale et les déplacements vertical dz et horizontal dx associés (figure 7) on peut écrire

$$\tan(\theta) = \frac{dx}{dz}$$

Q37) La relation de conservation $\sin \theta_0/c_0 = \sin \theta(z)/c(z)$, soit $\sin \theta(z) = \sin \theta_0 c(z)/c_0 = \sin \theta_0/n(z)$ s'écrit

$$\tan^2 \theta(z) = \frac{\sin^2 \theta(z)}{1 - \sin^2 \theta(z)} = \frac{\frac{\sin^2 \theta_0}{n^2(z)}}{1 - \frac{\sin^2 \theta_0}{n^2(z)}}$$

Q38) La combinaison des équations des deux questions précédentes conduit à l'équation différentielle souhaitée :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\tan^2 \theta(z)} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \theta_0}{n^2(z)}}{\frac{\sin^2 \theta_0}{n^2(z)}} = \frac{n^2(z)}{\sin^2 \theta_0} - 1$$

Q39) Entre 0 et 1000 m de profondeur on peut approximer la vitesse de propagation du son par une loi affine : $c(z) = a + bz$, soit avec $c(0) = 1545 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $c(1000 \text{ m}) = 1480 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$c = \left(1545 + \frac{1480 - 1545}{1000} z(\text{m})\right) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = (1545 - 6,5 \times 10^{-2} z(\text{m})) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Q40) Pour les profondeurs supérieures à 2000 m l'approximation affine est réaliste (mais pas réellement entre 1000 m et 2000 m). On relève sur le graphique $c(2000 \text{ m}) = 1490 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $c(11000 \text{ m}) = 1650 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ d'où

$$c = \left(1490 + \frac{1650 - 1490}{9000} (z(\text{m}) - 2000)\right) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = (1454 + 1,78 \times 10^{-2} z(\text{m})) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Q41) On peut transformer le rapport qui apparaît dans l'expression de $R(z)$:

$$\frac{1}{n^2} \frac{dn}{dz} = -\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{d}{dz} \left(\frac{c(z)}{c_0}\right) = -\frac{1}{c_0} \frac{dc}{dz}$$

Ce qui permet d'écrire

$$R(z) = \left| \frac{c_0}{\frac{dc}{dz} \sin \theta_0} \right|$$

Dans l'approximation affine $c_i(z) = a_i + b_i z$ de la vitesse de propagation sur chacun des domaines de profondeur $0 \leq z \leq 1000 \text{ m}$ et $1000 \text{ m} < z < 11000 \text{ m}$, le rayon de courbure est donc une constante égale à

$$R_i = \left| \frac{c_0}{b_i \sin \theta_0} \right|$$

Q42) L'angle d'émission doit dans tous les cas être inférieur à l'angle maximal d'émission $\theta_{\max} = 69,45^\circ$.

Q43) Pour l'angle maximal d'émission $\sin \theta_{\max} = 0,94$. On calcule pour cette valeur, et pour $c_0 = 1545 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $b_1 = -6,5 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ et $b_2 = 1,78 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

$$R_1 = 25 \text{ km} \gg 1 \text{ km} ; R_2 = 92 \text{ km} \gg 10 \text{ km}$$

Ces valeurs sont très supérieures aux distances verticales sur lesquelles l'onde acoustique se propage : on peut donc considérer que sa trajectoire est pratiquement rectiligne et que θ est une constante sur toute la propagation. On calcule alors avec une profondeur $\Delta z = 11 \text{ km}$ et un déplacement horizontal $\Delta x = 1 \text{ km}$

$$\theta = \arctan \left(\frac{\Delta x}{\Delta z} \right) = 5,2^\circ \ll \theta_{\max}$$

Valeur pour laquelle l'hypothèse de rayons rectilignes est aisément vérifiée : $\sin \theta = 0,091$, d'où $R_1 = 2,6 \times 10^2 \text{ km}$ et $R_2 = 9,5 \times 10^3 \text{ km}$

Remarque : L'équation différentielle (Q38) peut être résolue numériquement par rapport à la variable x pour z variant de 0 à 11 000 m, par exemple par la méthode d'Euler. On obtient pour $\theta = 5,2^\circ$ les courbes ci-dessous (en rouge la trajectoire tenant compte des variations de l'indice, en bleu la trajectoire dans l'hypothèse rectiligne) qui montrent la validité de l'approximation rectiligne dans ce problème.

