DM2

(d'après E3A PSI 2019 maths 1)

On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout élément f de $\mathcal{E}$, on note $U(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Soit $f \in \mathcal{E}$, T-périodique. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. On suppose de plus dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que si f est T-périodique, il en est de même pour f'.

b) Montrer que la réciproque est fausse

3. Montrer que la fonction $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

4. Montrer que l'application U qui à $f \in \mathcal{E}$ associe $U(f)$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ sa base canonique.

a) Montrer que la restriction de U à E_n définit un endomorphisme U_n de E_n.

b) Écrire la matrice de U_n dans la base $\mathcal{B}_n$.

c) L'endomorphisme U_n est-il bijectif ?

d) Déterminer les éventuelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $U_n - \lambda id_{E_n}$ n'est pas bijective et déterminer, pour ces valeurs de λ, la dimension de $\ker(U_n - \lambda id_{E_n})$.

6. Justifier que si f, élément de $\mathcal{E}$, est dans $\ker(U)$ alors :

a) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

b) f est périodique de période 1.

7. A-t-on $\ker(U) = \left\{ f \in \mathcal{E},\ \text{périodique de période 1 et telle que } \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$?

8. Donner explicitement une fonction f, non nulle, élément de $\ker(U)$.

9. L'endomorphisme U est-il surjectif ?

10. Soit a un réel non nul et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a : t \mapsto e^{at}$.

a) Déterminer $F_a = U(f_a)$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction réelle $g : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$.

c) Montrer que pour tout réel λ strictement positif, l'endomorphisme $U - \lambda id_{\mathcal{E}}$ n'est pas injectif.