Correction du DM2

Extrait de E3A PSI 2019 maths 1

1. On a $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$. On pose $t = T+u$ dans la $3^{\text{ème}}$ intégrale : la fonction $u \mapsto T+u$ est $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante de $[0,a]$ sur $[T, a+T]$ et on a $\displaystyle\int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(T+u)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u$ car f est T-périodique. On en déduit $\boxed{\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u}$

2. a) Si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(x+T) = f(x)$ alors, en dérivant, on obtient $f'(x+T) = f'(x)$ donc si f est T-périodique et dérivable alors $\boxed{f' \text{ est } T\text{-périodique}}$

b) $f : x \mapsto x + \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée $f' : x \mapsto 1 + \cos(x)$ est 2π-périodique mais f n'est pas périodique.

3. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc y admet une primitive F, qui est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et on a $U(f)(x) = F(x) - F(x-1)$. Par somme, $\boxed{U(f) \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } U(f)'(x) = f(x) - f(x-1)}$

4. On vient de voir que si $f \in \mathcal{E}$ alors $U(f) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}$ et la linéarité de U découle de la linéarité de l'intégrale : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha U(f)(x) + \beta U(g)(x)$ donc $\boxed{U \in \mathcal{L}(\mathcal{E})}$

5. a) La restriction de U à E_n reste linéaire et, si $k \in [\![0, n]\!]$, on a $U(X^k)(x) = \left[\dfrac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{x-1}^{x}$ donc $U(X^k) = \dfrac{1}{k+1}\left[X^{k+1} - (X-1)^{k+1}\right] = -\dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{p=0}^{k}\binom{k+1}{p}(-1)^{k+1-p}X^p \in E_n$ donc $\boxed{U \text{ induit un endomorphisme de } E_n}$

b) Le calcul de $U(X^k)$ précédent donne les coefficients de la $k+1^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de U dans la base canonique de E_n : si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n}(U) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$ alors $\boxed{a_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{j-i}}{j}\dbinom{j}{i-1} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

c) La matrice précédente étant triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, on a $\det(U_n) = 1^{n+1} = 1$ donc $\boxed{U_n \text{ est bijectif}}$

d) On a de même $\det(U_n - \lambda id) = (1-\lambda)^{n+1}$ donc la seule valeur pour laquelle $U_n - \lambda id$ n'est pas bijectif est $\boxed{\lambda = 1}$. On vérifie facilement, toujours grâce à la matrice de U_n, que $\mathrm{rg}(U_n - id) = n$ car les colonnes d'indices $j \in [\![2, n+1]\!]$ sont libres. On en déduit par la formule du rang : $\dim(\ker(U_n - id)) = (n+1) - \mathrm{rg}(U_n - id) = 1$. Comme $U_n(1) = 1$, donc $(U_n - id)(1) = 0$, 1 est un vecteur non nul de la droite $\ker(U_n - id)$ donc en forme une base et $\boxed{\ker(U_n - id) = \mathrm{Vect}\{1\} = \mathbb{R}_0[X]}$

6. a) Si $f \in \ker(U)$ alors $\displaystyle\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; en particulier pour $x = 1$, on obtient $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0}$

b) Si $U(f) = 0$ alors, comme $U(f) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, on a $U(f)' = 0$ aussi donc $f(x) - f(x-1) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ie $\boxed{f \text{ est 1-périodique}}$

7. Si f est 1-périodique alors $U(f)' = 0$ donc $U(f)$ est constante (car $\mathbb{R}$ est un intervalle) donc $U(f) = U(f)(1) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi on a $\left\{f \in \mathcal{E},\ \text{périodique de période 1 et telle que } \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\} \subset \ker(U)$. L'inclusion inverse ayant été justifiée à la question **6**, on a $\boxed{\ker(U) = \left\{f \in \mathcal{E},\ \text{périodique de période 1 et telle que } \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}}$

8. Si $\boxed{f(t) = \cos(2\pi t)}$ alors $f \in \mathcal{E}$ est 1-périodique et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\right]_0^1 = 0$ donc $f \in \ker(U)$

9. On a vu que $\mathrm{Im}(U) \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ donc $\boxed{U \text{ n'est pas surjectif}}$: la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, donc dans $\mathcal{E}$, mais pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc elle n'appartient pas à $\mathrm{Im}(U)$.

10. a) $F_a(x) = \left[\dfrac{e^{-at}}{a}\right]_{x-1}^{x} = \dfrac{1-e^{-a}}{a} f_a(x)$ donc $\boxed{F_a = \dfrac{1-e^{-a}}{a} f_a}$

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, prolongeable par continuité en 0 car $\lim\limits_{0} g = 1$. De plus $g'(x) = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$. On pose alors $h(x) = (x-1)e^x + 1$, on a $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $h'(x) = xe^x$; h est donc décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$, croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $h(0) = 0$ donc $h \geqslant 0$ et $\boxed{g \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$ On a aussi $\lim\limits_{-\infty} g = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$.

c) g est continue sur $\mathbb{R}$ (après prolongement en 0), $\lim\limits_{-\infty} g = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$ donc, d'après le TVI, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = g(a)$ (ce réel a est même unique car comme g est en fait strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$). Pour un tel réel a, on a $U(f_{-a}) = g(-a)f_{-a} = \lambda f_{-a}$. Comme $f_{-a} \neq 0$, on en déduit $\ker(U - \lambda id) \neq \{0\}$ donc $\boxed{U - \lambda id \text{ n'est pas injectif}}$