(d'après Mines-Ponts PC 2001)

NOTATIONS

Soit V un espace vectoriel réel ; l'espace vectoriel des endomorphismes de l'espace vectoriel V est désigné par $\mathcal{L}(V)$. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel V ; l'endomorphisme noté f^k, où k est un entier naturel désigne l'endomorphisme unité Id_V si l'entier k est nul, l'endomorphisme obtenu en composant f k-fois avec lui-même si l'entier k est supérieur ou égal à 1 :

$$f^0 = Id_V \quad ; \quad f^{k+1} = f^k \circ f$$

Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels ; étant donné un entier naturel n, soit E_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n :

$$E = \mathbb{R}[X] \quad ; \quad E_n = \mathbb{R}_n[X].$$

Soit D l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ qui, au polynôme Q, fait correspondre le polynôme dérivé Q'. De même, soit D_n l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ qui, au polynôme Q, fait correspondre le polynôme dérivé Q'.

L'objet et du problème est de rechercher des réels λ pour lesquels l'endomorphisme $\lambda Id_E + D$ est égal au composé d'un endomorphisme g de l'espace vectoriel E avec lui-même ; ainsi que des réels λ pour lesquels l'endomorphisme $\lambda Id_{E_n} + D_n$ est égal au composé d'un endomorphisme g de l'espace vectoriel E_n avec lui-même.

PRÉLIMINAIRES

Noyaux itérés :

Soient V un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de V.

1. Démontrer que la suite des noyaux des endomorphismes $f^k, k = 0, 1, 2, \ldots$ est une suite de sous-espaces vectoriels de V emboîtée croissante :

$$\ker f^0 \subset \ker f^1 \subset \ker f^2 \subset \ldots \subset \ker f^k \subset \ker f^{k+1} \subset \ldots$$

2. Démontrer que, s'il existe un entier p tel que les noyaux des endomorphismes f^p et f^{p+1} soient égaux ($\ker f^p = \ker f^{p+1}$), pour tout entier q supérieur ou égal à p, les noyaux des endomorphismes f^q et f^{q+1} sont égaux ($\ker f^q = \ker f^{q+1}$) ; en déduire la propriété suivante :

$$\text{pour tout entier } k \text{ supérieur ou égal à } p, \quad \ker f^k = \ker f^p.$$

En déduire que, si l'espace vectoriel V est de dimension finie n, la suite des dimensions des noyaux des endomorphismes f^k est constante à partir d'un rang p inférieur ou égal à la dimension n ($p \leq n$). En particulier les noyaux $\ker f^n$, $\ker f^{n+1}$ sont égaux.

3. Démontrer que, si l'endomorphisme u d'un espace vectoriel V de dimension finie n, est tel qu'il existe un entier q supérieur ou égal à 1 ($q \geq 1$), pour lequel l'endomorphisme u^q est nul ($u^q = 0$), l'endomorphisme u^n est nul. L'endomorphisme u est dit nilpotent.

PREMIÈRE PARTIE

Le but de cette partie est d'établir des propriétés des endomorphismes g recherchés et de donner un exemple.

1. Une caractérisation des sous-espaces vectoriels stables par g :

Soit λ un réel donné.

a) Étant donné un entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$), soit p un entier naturel inférieur ou égal à l'entier n ($0 \leq p \leq n$). Démontrer que, s'il existe un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$, tel que

$$g^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n$$

l'endomorphisme g commute avec D_n : $g \circ D_n = D_n \circ g$.

En remarquant que le sous-espace vectoriel $E_p = \mathbb{R}_p[X]$ est égal à $\ker (D_n)^{p+1}$, démontrer que E_p est stable par l'endomorphisme g de E_n ; soit g_p la restriction de l'endomorphisme g à E_p. Démontrer la relation :

$$(g_p)^2 = \lambda Id_{E_p} + D_p.$$

b) Démontrer que, s'il existe un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$, tel que

$$g^2 = \lambda Id_E + D,$$

l'endomorphisme g commute avec D : $g \circ D = D \circ g$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, le sous-espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ est stable par l'endomorphisme g et que, si g_n est la restriction de l'endomorphisme g à E_n, il vient :

$$(g_n)^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n.$$

c) Soit g un endomorphisme de l'espace des polynômes réels $E = \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$g^2 = \lambda Id_E + D\,.$$

i/ Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E de dimension $n+1$ stable par l'endomorphisme D. Démontrer que l'endomorphisme D_F, restriction de D à F, est nilpotent.
En déduire que le sous-espace vectoriel F est égal à $E_n = \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer ensuite tous les sous-espaces vectoriels G de E (de dimension finie ou non) stables par D.

ii/ Démontrer que, pour qu'un sous-espace vectoriel G de E soit stable par l'endomorphisme g, il faut et il suffit qu'il soit stable par D.

2. Une application immédiate : le cas $\lambda < 0$:

a) À quelle condition nécessaire sur le réel λ existe-t-il un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_0 = \mathbb{R}_0[X]$ tel que

$$g^2 = \lambda Id_{E_0} + D_0 \ ?$$

b) Soit λ un réel strictement négatif ($\lambda < 0$), déduire des résultats précédents les deux propriétés :
(1) : Il n'existe pas d'endomorphisme g de E tel que : $g^2 = \lambda Id_E + D$.
(2) : Il n'existe pas d'endomorphisme g de E_n tel que : $g^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n$.

3. Une représentation matricielle simple de D_n :

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 1, λ un réel.
Matrice A_λ : soit A_λ la matrice carrée d'ordre $n+1$ définie par les relations suivantes : ses coefficients a_{ij}, $i = 0, 1, ...n$, $j = 0, 1, ...n$, sont définis par les relations :

$$a_{ii} = \lambda, \quad a_{i\,i+1} = 1, \quad a_{ij} = 0 \text{ si } j \neq i \text{ ou si } j \neq i+1.$$

C'est-à-dire :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

a) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie $n+1$ tel que l'endomorphisme f^{n+1} soit nul sans que l'endomorphisme f^n le soit :

$$f^{n+1} = 0, \quad f^n \neq 0\,.$$

Démontrer qu'il existe un vecteur y de l'espace vectoriel V tel que la famille
$B = \left(f^n(y), f^{n-1}(y), ..., y\right)$ soit libre. Quelle est la matrice associée à l'endomorphisme f dans la base B ?

b) En déduire qu'il existe une base B_n de l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ pour laquelle la matrice associée à l'endomorphisme D_n est la matrice A_0. Que vaut la matrice associée à l'application $\lambda Id_{E_n} + D_n$ dans cette base B_n ?

4. Un exemple :

Dans cette question l'entier n est égal à 2.

a) Démontrer que les seuls endomorphismes h de E_2 qui commutent avec l'endomorphisme D_2 sont les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 en D_2 :

$$h = aId_{E_2} + bD_2 + c\left(D_2\right)^2\,.$$

a, b, c sont trois réels.

b) En déduire qu'il existe des endomorphismes g de E_2 qui vérifient la relation suivante :

$$g^2 = \lambda Id_{E_2} + D_2\,.$$

Déterminer les matrices carrées G d'ordre 3 qui vérifient la relation suivante :

$$G^2 = A_1.$$