PSI2 pour le lundi 17 octobre 2022

DM4

(d'après Mines-Ponts PC 2001)

Dans cet exercice, on note α et θ deux réels fixés et on s'intéresse à la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$, où

$$u_n = \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$$

1. Justifier que, si $\alpha \leqslant 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est divergente.

2. Pour quelles valeurs de α, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est-elle absolument convergente ?

3. Deux cas particuliers :

a) On suppose, dans cette question, $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. Pour quelles valeurs de α, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est-elle convergente ?

b) On suppose, dans cette question, $\theta = \pi$. Pour quelles valeurs de α, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite de cet exercice, on suppose que θ n'est pas un multiple de 2π ($\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$) et que α vérifie $0 < \alpha \leqslant 1$.

4. On pose, pour $n \geqslant 1$, $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$

a) Montrer que $|A_n| = \left|\dfrac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right|$ et en déduire que la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

b) Justifier l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{A_n}{(n+1)^\alpha} + \sum_{k=1}^{n}\left[A_k\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)\right]$$

c) Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\left[A_k\left(\dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\right)\right]$ est absolument convergente puis en déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$

5. On suppose cette fois $\alpha = 1$ et $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$; on a donc $u_n = \dfrac{e^{in\theta}}{n}$.

a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^k \,\mathrm{d}t$ et en déduire

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \int_0^1 e^{i\theta}\,\frac{1-\left(e^{i\theta}t\right)^n}{1-e^{i\theta}t}\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}t}\,\mathrm{d}t$$

c) Calculer la dérivée de $\varphi : t \longmapsto -\dfrac{1}{2}\ln\left(t^2 - 2t\cos\theta + 1\right) + i\arctan\left(\dfrac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\right)$ et en déduire la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$

d) Justifier la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\sin(n\theta)}{n}$ et montrer que, pour $\theta \in]0, 2\pi[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}$$