Correction du DM4

1. Pour $\alpha \leqslant 0$, la suite (u_n) ne tend pas vers 0 donc $\boxed{\sum u_n \text{ est GDV pour } \alpha \leqslant 0}$

2. $|u_n| = \dfrac{1}{n^\alpha}$ donc $\boxed{\sum u_n \text{ est ACV si et seulement si } \alpha > 1}$

3. a) Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ alors $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ donc $\boxed{\sum u_n \text{ CV si et seulement si } \alpha > 1 \text{ pour } \theta \in 2\pi\mathbb{Z}}$

b) Pour $\theta = \pi$, on a $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ donc $\boxed{\sum u_n \text{ CV si et seulement si } \alpha > 0 \text{ pour } \theta = \pi}$

4. a) Si $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$ alors $e^{i\theta} \neq 1$ donc

$$A_n = e^{i\theta}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{i\theta}\right)^{k-1} \overset{p=k-1}{=} e^{i\theta}\sum_{p=0}^{n-1}\left(e^{i\theta}\right)^{p} = e^{i\theta}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}} = e^{i\theta}\frac{e^{in\theta/2}\left(e^{-in\theta/2}-e^{in\theta/2}\right)}{e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}\right)} = e^{i\frac{n+1}{2}\theta}\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

On a donc bien, $|A_n| = \left|\dfrac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right| \leqslant \dfrac{1}{|\sin(\theta/2)|}$ donc $\boxed{(A_n) \text{ est bornée}}$

b) Cette égalité peut se prouver facilement par récurrence sur n mais on peut aussi la trouver directement : on remarque que $e^{ik\theta} = A_k - A_{k-1}$ pour $k \geqslant 2$, ce que l'on peut aussi rendre valable pour $k = 1$ en posant $A_0 = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k - A_{k-1}}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{n}\frac{A_{k-1}}{k^\alpha} \overset{p=k-1}{=} \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{k^\alpha} - \sum_{p=0}^{n-1}\frac{A_p}{(p+1)^\alpha}\\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) - A_0 + \frac{A_n}{(n+1)^\alpha}\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat attendu avec $A_0 = 0$.

c) On a $\left|A_k\left(\dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\right)\right| = |A_k|\left(\dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\right) \leqslant \dfrac{1}{|\sin(\theta/2)|}\left(\dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$ puis comme $\alpha > 0$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{1}{k^\alpha} = 0$ et, par télescopage, $\sum\left(\dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$ CV ; le théorème de comparaison des SATP permet alors de conclure $\boxed{\sum A_k\left(\dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\right) \text{ est ACV}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{A_n}{(n+1)^\alpha} = 0$ (car (A_n) bornée) donc (**4.b**) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} A_k\left(\dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$ donc $\boxed{\sum u_n \text{ CV}}$

5. a) $\displaystyle\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}$ donc $u_k = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1}e^{ik\theta}\,\mathrm{d}t$; on en déduit

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \overset{\text{somme finie}}{=} \int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}e^{ik\theta}\right)\mathrm{d}t \overset{p=k-1}{=} \int_0^1 e^{i\theta}\left(\sum_{p=0}^{n-1}\left(te^{i\theta}\right)^k\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{i\theta}\frac{1-(te^{i\theta})^n}{1-te^{i\theta}}\,\mathrm{d}t$$

b) Il s'agit de prouver $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1\frac{t^n e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}t = 0$: on commence par $\left|\displaystyle\int_0^1\frac{t^n e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{|1-te^{i\theta}|}\,\mathrm{d}t$. La fonction $g : t \mapsto |1-te^{i\theta}|$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc admet sur ce segment un minimum $m = g(c)$ pour $c \in [0,1]$ (et un maximum) ; comme $e^{-i\theta} \notin [0,1]$, g ne s'annule pas sur $[0,1]$ et $g(c) > 0$. On a donc $\left|\displaystyle\int_0^1\frac{t^n e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{g(c)}\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{g(c)} \times \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par encadrement, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1\frac{t^n e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}t = 0$ et $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \int_0^1\frac{e^{i\theta}}{1-te^{i\theta}}\,\mathrm{d}t}$

c) φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ car $t^2 - 2t\cos\theta + 1 = |t - e^{it\theta}|^2 > 0$ et $1 - t\cos\theta \neq 0$ car $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. On a alors, pour $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \frac{\cos\theta - t}{|t-e^{it\theta}|^2} + i\frac{\sin\theta(1-t\cos\theta) + t\sin\theta\cos\theta}{(1-t\cos\theta)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\right)^2}\\ &= \frac{\cos\theta - t}{|t-e^{it\theta}|^2} + i\frac{\sin\theta}{(1-t\cos\theta)^2 + (t\sin\theta)^2} = \frac{e^{i\theta} - t}{|t-e^{it\theta}|^2} = \frac{1}{e^{-i\theta} - t} = \frac{e^{i\theta}}{1-te^{i\theta}}\end{aligned}$$

On a donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-te^{i\theta}}\,\mathrm{d}t = \Big[\varphi(t)\Big]_0^1 = \boxed{-\frac{1}{2}\ln(2-2\cos\theta) + i\arctan\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n}$

d) $\displaystyle\frac{\sin(n\theta)}{n} = \mathrm{Im}(u_n)$ donc la CV de $\sum u_n$ entraine celle de $\displaystyle\sum \frac{\sin(n\theta)}{n}$ et on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \arctan\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$, que l'on peut simplifier si, $\theta \in]0, 2\pi[$: $\displaystyle\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{2\sin^2(\theta/2)} = \tan\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)$ et $\displaystyle\frac{\pi-\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\displaystyle\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}}$