Dans ce problème, on s'intéresse au commutant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement d'un endomorphisme u de E), c'est-à-dire à l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement des endomorphismes $v \in \mathcal{L}(E)$) qui commutent avec A. On notera cet ensemble $\mathcal{C}(A)$ (respectivement $\mathcal{C}(u)$) :

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}.$$

On admettra que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables alors $\dim(\mathcal{C}(A)) = \dim(\mathcal{C}(B))$.
On admettra de même que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et que $\dim(\mathcal{C}(u)) = \dim(\mathcal{C}(A))$ si A est une matrice représentant u dans une base de E.

Partie I : Étude d'un exemple
Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Réduction de A.

a) Déterminer les valeurs propres de A et une base de chacun de ses sous-espaces propres.

b) En déduire que A est diagonalisable puis donner une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale (et préciser cette matrice diagonale).

2. Commutant de A.

a) Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ commute avec D si et seulement si N est de la forme : $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$, où $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$.

b) En déduire la dimension du commutant de D.

c) Quelle est la dimension de $\mathcal{C}(A)$?

Partie II : Commutant d'un endomorphisme nilpotent d'indice 2
Dans cette partie, on suppose que E est un espace de dimension finie n et que $f \in \mathcal{L}(E)$ est tel que

$$f \neq 0 \quad \text{et} \quad f^2 = 0$$

1. Une décomposition de E.

a) Justifier que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.

On introduit F un supplémentaire de $\mathrm{Im}(f)$ dans $\ker(f)$ et G un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E. On a donc les égalités :

$$\ker(f) = \mathrm{Im}(f) \oplus F \quad \text{et} \quad E = \mathrm{Im}(f) \oplus F \oplus G.$$

On note $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(f) \oplus F \oplus G$.

b) Justifier que $\dim(G) = \mathrm{rg}(f)$.

c) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis montrer que A est inversible ; on pourra s'intéresser au rang de A.

2. Commutant de f.
Soit g un endomorphisme de E ; on décompose sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ M_4 & M_5 & M_6 \\ M_7 & M_8 & M_9 \end{pmatrix},$$

les différents blocs ayant la même taille que ceux de la matrice de f dans $\mathcal{B}$ introduite précédemment.

a) Montrer que f et g commutent si et seulement si $M_4 = M_7 = M_8 = 0$ et $M_9 = A^{-1}M_1A$.

b) En déduire $\dim(\mathcal{C}(f)) = (n-r)^2 + r^2$, où $r = \mathrm{rg}(f)$.
On pourra introduire $\varphi : (M_1, M_2, M_3, M_5, M_6) \mapsto \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ 0 & M_5 & M_6 \\ 0 & 0 & A^{-1}M_1A \end{pmatrix}$ *en précisant son espace de départ.*

Partie III : Endomorphismes tels que $(u - id) \circ (u - 2id)^2 = 0$
Dans cette partie, on suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie n et que u est un endomorphisme de E tel que

$$(u - id) \circ (u - 2id)^2 = 0.$$

On supposera de plus que u n'est pas une homothétie, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de réel λ tel que $u = \lambda id$.

1. Cas diagonalisable.
Dans cette question, on suppose que u est diagonalisable.

a) Montrer que $\mathrm{Sp}(u) = \{1, 2\}$.

b) On note $E_1(u) = \ker(u - id)$ et $E_2(u) = \ker(u - 2id)$ les sous-espaces propres de u puis $n_1 = \dim(E_1(u))$ et $n_2 = \dim(E_2(u))$.
Montrer que $v \in \mathcal{L}(E)$ commute avec u si et seulement si $E_1(u)$ et $E_2(u)$ sont stables par v.

c) Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = E_1(u) \oplus E_2(u)$. Déduire de la question précédente une condition nécessaire et suffisante, portant sur la forme de la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$, pour que v commute avec u.

d) En déduire la dimension de $\mathcal{C}(u)$ en fonction de n_1 et n_2.

2. Cas non diagonalisable.
On suppose cette fois-ci que u n'est pas diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(u) = \{1, 2\}$.
On pose $E_1 = \ker(u - id)$ et $E_2 = \ker[(u - 2id)^2]$; on remarquera en particulier que E_2 n'est pas, à priori, un sous-espace propre de u. Enfin, on note n_1 et n_2 les dimensions de E_1 et E_2 respectivement.

a) Justifier que $\mathrm{Im}(u - id) \subset E_2$ et $\mathrm{Im}[(u - 2id)^2] \subset E_1$.

b) Vérifier que $E = E_1 \oplus E_2$; on pourra vérifier que si $x \in E$ alors $x = (u - 2id)^2(x) - (u - id) \circ (u - 3id)(x)$.

On définit trois endomorphismes de la façon suivante :

$$p = (u - 2id)^2 \quad , \quad d = 2id - p \quad \text{et} \quad w = u - d$$

c) Montrer que $v \in \mathcal{L}(E)$ commute avec u si et seulement si v commute avec d et w ; on pourra utiliser que d et w sont des polynômes en u.

d) Justifier que p est le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 puis en déduire la matrice de d dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$.

e) Vérifier que $w = (u - 2id) \circ (u - id)$ et en déduire que $w^2 = 0$ et $w \neq 0$.

f) Montrer que $\mathrm{Im}(w) \subset E_2$ et $E_1 \subset \ker(w)$.
En déduire que la matrice de w dans la base $\mathcal{B}$ précédente est de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}, \text{ avec } N \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R})$$

g) Vérifier que $N^2 = 0$ et prouver que $\mathrm{rg}(N) = n_2 - \dim(\ker(u - 2id))$.

h) Montrer que v commute avec u si et seulement si

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_2N = NV_2$$

i) Déterminer la dimension de $\mathcal{C}(u)$ en fonction de n_1, n_2 et $\mathrm{rg}(u - 2id)$.

3. Quelle est la dimension de $\mathcal{C}(u)$ si $\mathrm{Sp}(u) = \{2\}$?