PSI2 pour le mardi 3 janvier 2023

DM8

(CCP PSI 2007 maths 2)

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.
Pour n entier naturel non nul, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes) à coefficients réels.
On note $\det(A)$ le déterminant d'une matrice carrée A et B^T la transposée d'une matrice B quelconque.
Étant donnée une matrice A, la notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A.
Lorsque $A = (a)$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on identifie A avec le réel a.
Pour tout entier naturel, on note $n!$ la factorielle de n, avec la convention $0! = 1$.
Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leqslant k \leqslant n$:

- on note $[\![p, n]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $p \leqslant k \leqslant n$.
- on rappelle la notation $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Le produit scalaire de deux vecteurs u et v d'un espace préhilbertien sera noté $(u|v)$.

PARTIE I.

Les résultats de cette partie ne serviront que dans la partie III.

1. Déterminant d_p.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $p \in [\![0, n]\!]$, on note $A_p = (a_{i,j})$ la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n-p+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égal à $a_{i,j} = \displaystyle\binom{p+i+j-2}{p+i-1}$ avec $(i, j) \in [\![1, n-p+1]\!] \times [\![1, n-p+1]\!]$. On note $d_p = \det(A_p)$.

a) Expliciter les entiers r et s tels que $a_{i,j} = \displaystyle\binom{r}{s}$ pour les quatre coefficients $a_{1,1}, a_{1,n-p+1}$, $a_{n-p+1,1}$ et $a_{n-p+1,n-p+1}$.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ calculer les déterminants d_n, d_{n-1} et d_{n-2}.

c) On suppose que la matrice A_p possède au moins deux lignes. On note L_i la ligne d'indice i.

i. Dans le calcul de d_p on effectue les opérations suivantes : pour i variant de $n-p+1$ à 2, on retranche la ligne L_{i-1} à la ligne L_i (opération codée $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$). Déterminer le coefficient d'indice (i, j) de la nouvelle ligne L_i.

ii. En déduire une relation entre d_p et d_{p+1}, puis en déduire d_p.

2. Déterminants D_n et Δ_n.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note D_n le déterminant de la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $(i+j)!$, **les lignes et les colonnes étant indexées de** 0 **à** n.
On note $D_n = \det((i+j)!)$. Avec les mêmes notations, on note $\Delta_n = \det\left(\displaystyle\binom{i+j}{i}\right)$ pour $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, n]\!]$.

a) Calculer les déterminants D_0, D_1, D_2, Δ_0, Δ_1 et Δ_2.

b) Donner une relation entre D_n et Δ_n.

c) En déduire Δ_n puis D_n.

PARTIE II.

A) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $C = (c_{i,j})$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient de la ligne i qui vaut 1.

a) Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, déterminer le produit $X_i^T C X_j$.

b) En déduire que $C = 0$ si et seulement si pour tout couple (X, Y) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $X^T C Y = 0$.

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = (e_i|e_j)$ le produit scalaire de e_i et e_j.
Pour tout vecteur u de E, on note avec la même lettre majuscule U la matrice colonne des composantes du vecteur u relativement à la base $\mathcal{B}$.

2. Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, justifier l'égalité $(x|y) = X^T A Y$.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une autre base de E et soit $A' = (a'_{i,j})$ la matrice carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a'_{i,j} = (e'_i|e'_j)$. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

3. Pour tout vecteur u de E, on note U' la matrice colonne des composantes du vecteur u relativement à la base $\mathcal{B}'$.

a) Soit x un vecteur de E. Donner une relation entre les matrices X, X' et P.

b) Justifier l'égalité $A' = P^T AP$.

c) Que devient l'égalité précédente lorsque $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale ?

d) Montrer que la matrice A est inversible et que $\det(A) > 0$.

e) Déduire des résultats précédents que si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une famille libre de vecteurs d'un espace préhilbertien réel, la matrice $B = ((\varepsilon_i|\varepsilon_j))$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de coefficients les produits scalaires $(\varepsilon_i|\varepsilon_j)$, vérifie $\det(B) > 0$.

B) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans un espace préhilbertien réel $\mathcal{H}$, on considère n vecteurs **quelconques** $u_1, \dots, u_n$. Soit $M = ((u_i|u_j))$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients les produits scalaires $(u_i|u_j)$. A toute matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on associe le vecteur $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i u_i$.

1. Dans cette question on suppose $n = 2$.

a) Montrer que $\det(M) \geqslant 0$.

b) À quelle condition sur $\det(M)$ la famille (u_1, u_2) est-elle libre ?

On revient au cas général où n est quelconque dans $\mathbb{N}^*$.

2. Exprimer les coefficients de la matrice MX en fonction des produits scalaires $(u_i|v)$.

3. En déduire l'égalité $X^T MX = \|v\|^2$ où $\|v\|$ est la norme du vecteur v.

4. Soit λ une valeur propre (complexe) de la matrice M. Justifier que λ appartient à $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda \geqslant 0$.

On pourra calculer $\overline{Z}^T MZ$ avec Z un vecteur propre complexe associé à λ et remarquer que M est symétrique.

5. Montrer que $MX = 0$ si et seulement si v est le vecteur nul.

6. On suppose que la matrice M est inversible, déduire de la question précédente que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.

<u>Définition</u> : étant donné n vecteurs $v_1, \dots, v_n$ d'un espace préhilbertien réel $\mathcal{H}$, on appelle matrice de Gram des vecteurs $v_1, \dots, v_n$, la matrice $G(v_1, \dots, v_n) = ((v_i|v_j))$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients les produits scalaires $(v_i|v_j)$.

Il résulte de la partie **II** que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre si et seulement si $\det(G(v_1, \dots, v_n)) \neq 0$; dans ce cas, on a $\det(G(v_1, \dots, v_n)) > 0$.

PARTIE III.

Soit n un entier naturel avec $n \geqslant 2$.

On considère n vecteurs $v_1, \dots, v_n$ d'un espace préhilbertien réel $\mathcal{H}$.

1. Opérations sur les vecteurs d'une matrice de Gram. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Exprimer $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n))$ en fonction de λ et de $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n))$

b) Exprimer $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_1))$ en fonction de $\det(G(v_1, \dots, v_n))$.

2. Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ engendré par les vecteurs $v_1, \dots, v_n$.

a) Soit w un vecteur de $\mathcal{H}$ orthogonal à F. Exprimer $\det(G(v_1, \dots, v_n, w))$ en fonction de w et de $\det(G(v_1, \dots, v_n))$.

b) Soit $v \in \mathcal{H}$, on note $d(v, F)$ la distance du vecteur v au sous-espace vectoriel F.
Montrer l'égalité $\det(G(v_1, \dots, v_n, v)) = (d(v, F))^2 \det(G(v_1, \dots, v_n))$.

3. Calcul de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.

a) Pour $k \in \mathbb{N}$, justifier la convergence des intégrales $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt$ et calculer leur valeur.

On rappelle (et on admettra) que $\mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, est un espace préhilbertien réel pour le produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)Q(t)\, dt$.

On considère la base de $\mathbb{R}[X]$ formée des vecteurs e_k où $e_k = X^k,\ k \in \mathbb{N}$.

b) Calculer les produits scalaires $(e_i|e_j)$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes et de la partie **I**, la distance du vecteur e_n au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ des polynômes de degré $\leqslant n - 1$ de l'espace $\mathbb{R}[X]$.