Correction du DM8

Problème : (extrait de CCP PSI 2007 maths 2)
Partie I :

1. a) $\boxed{a_{1,1} = \binom{p}{p} = 1,\ a_{1,n-p+1} = \binom{n}{p},\ a_{n-p+1,1} = \binom{n}{n} \text{ et } a_{n-p+1,n-p+1} = \binom{2n-p}{n}}$

b) $\boxed{d_n = \binom{n}{n} = 1}$ $d_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & n \\ 1 & n+1 \end{vmatrix}$ donc $\boxed{d_{n-1} = 1}$ Enfin, $d_{n-2} = \begin{vmatrix} 1 & n-1 & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 1 & n+1 & \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} \end{vmatrix} = \boxed{1 = d_{n-2}}$

c) i. $a'_{i,j} = a_{i,j} - a_{i-1,j} = \binom{p+i+j-2}{p+i-1} - \binom{p+i+j-3}{p+i-2} = \boxed{\binom{p+i+j-3}{p+i-1}, \text{ si } j \geqslant 2 \text{ et } a'_{i,1} = 0}$

ii. On a donc $d_p = \begin{vmatrix} 1 & \binom{p+2}{p+1} & \dots & \binom{n}{p+1} \\ 0 & & A_{p+1} & \end{vmatrix} = d_{p+1}$. Ainsi, on a $\boxed{d_p = 1}$

2. a) $\boxed{D_0 = 1,\ D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1}$ et $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{vmatrix}$ donc $\boxed{D_2 = 4}$

$\boxed{\Delta_0 = 1,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1}$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ donc $\boxed{\Delta_2 = 1}$

b) En factorisant la $i^{\text{ème}}$ ligne de Δ_n par $\dfrac{1}{i!}$ et la $j^{\text{ème}}$ colonne par $\dfrac{1}{j!}$, on obtient $\boxed{\Delta_n = \dfrac{1}{((1!)(2!)\dots(n!))^2} D_n}$

c) Comme $\Delta_n = d_0$, on a $\boxed{\Delta_n = 1 \text{ et } D_n = ((1!)(2!)\dots(n!))^2 = \prod_{k=1}^{n}(k!)^2}$

Partie II : A

1. a) On vérifie $\boxed{X_i^T C X_j = c_{i,j}}$ soit par calcul direct, soit en remarquant que c'est $(X_i|CX_j)$ pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et comme $(X_1,\dots,X_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, donc orthonormale pour ce produit scalaire, $(X_i|CX_j)$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur CX_j, qui est la $j^{\text{ème}}$ colonne de C.

b) Si $X^T C Y = 0$ pour tout couple (X,Y) alors, avec $X = X_i$ et $Y = X_j$, on obtient $c_{i,j} = 0$ pour tout couple (i,j) donc $C = 0$; la réciproque est évidente donc $\boxed{C = 0 \Leftrightarrow \forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, X^T C Y = 0}$

2. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, par bilinéarité du produit scalaire, on a $(x|y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (e_i|e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j$.

D'autre part, on a $(AY)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j$ puis $X^T A Y = \sum_{i=1}^{n} x_i (AY)_i$ et $\boxed{(x|y) = X^T A Y}$

3. a) Cours (de première année) : $\boxed{X = PX'}$

b) D'après **II.A.2**, on a $(x|y) = X^T A Y = X'^T A' Y'$ donc $(PX')^T A (PY') = X'^T A' Y'$ pour tout couple (X', Y'), ce qui donne $X'^T (P^T A P - A') Y' = 0$; ceci étant valable pour tout couple (X', Y'), on en déduit, d'après **II.A.1**, $\boxed{P^T A P = A'}$

c) Si $\mathcal{B}'$ est orthonormale alors $A = I_n$ donc $\boxed{P^T A P = I_n}$

d) On utilise la question précédente et pour cela, on <u>choisit une base $\mathcal{B}'$ orthonormale</u> et on a $A = (P^{-1})^T P^{-1}$ (P est une matrice de passage donc est inversible) ; on en déduit $\det(A) = \det((P^{-1})^T)\det(P^{-1}) = \det(P^{-1})^2$. Comme P est inversible, on a $\det(P) \neq 0$, ce qui donne $\boxed{\det(A) > 0 \text{ donc } A \text{ est inversible}}$

e) Il suffit d'appliquer ce qui vient d'être fait à l'espace $F = \mathrm{Vect}\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p\}$ dont $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p)$ est une base.

Partie II : B

1. a) On a $\det(M) = \begin{vmatrix} \|u_1\|^2 & (u_1|u_2) \\ (u_2|u_1) & \|u_2\|^2 \end{vmatrix} = \|u_1\|^2 \times \|u_2\|^2 - (u_1|u_2)^2$. On en déduit, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\boxed{\det(M) \geqslant 0}$

b) On a aussi $\boxed{\det(M) > 0 \text{ si et seulement si } (u_1, u_2) \text{ est libre}}$ d'après la caractérisation de l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2. On a $(MX)_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (u_i|u_j)x_j$ donc $\boxed{(MX)_i = (u_i|v)}$ par linéarité à droite.

3. On a alors $X^T MX = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(MX)_i = \sum_{i=1}^{n} x_i(u_i|v)$ donc $\boxed{X^T MX = \|v\|^2}$ cette fois par linéarité à gauche.

4. $\overline{Z}^T MZ = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \overline{z_i} m_{i,j} z_j$ et comme $MZ = \lambda Z$, on a aussi $\overline{Z}^T MZ = \overline{Z}^T \lambda Z = \lambda \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2$. On vérifie aussi, car M est symétrique et réelle, (il suffit d'échanger les deux indices i et j) que $(\overline{MZ})^T Z = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \overline{z_i} m_{i,j} z_j$ et $(\overline{MZ})^T Z = \overline{\lambda Z}^T Z$; on en déduit $\lambda \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2$. Comme Z est un vecteur propre, il existe i tel que $z_i \neq 0$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 > 0$, ce qui donne $\lambda = \overline{\lambda}$ donc $\boxed{\lambda \in \mathbb{R}}$.

Si on choisit maintenant X un vecteur propre réel associé à λ, le calcul précédent donne $X^T MX = \lambda\|X\|^2$ et, d'après **II.B.3**, $X^T MX = \|v\|^2 \geqslant 0$. Comme $X \neq 0$, on a $\lambda = \dfrac{\|v\|^2}{\|X\|^2}$ donc $\boxed{\lambda \in \mathbb{R}^+}$

5. Si $MX = 0$ alors $X^T MX = 0$ donc $\|v\| = 0$, ie $v = 0$. Réciproquement, si $v = 0$ alors $(MX)_i = (u_i|v) = 0$ donc $MX = 0$. On a donc l'équivalence $\boxed{v = 0 \Leftrightarrow X^T MX = 0}$

6. Si on suppose $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i u_i = 0$ alors $v = 0$, ce qui donne par la question précédente $MX = 0$; comme M est inversible, on en déduit $X = 0$, ce qui signifie $x_1 = \cdots = x_n = 0$ donc $\boxed{(u_1, \ldots, u_n) \text{ est libre}}$

Partie III :

1. a) En factorisant par λ la dernière colonne puis la dernière ligne du déterminant $G(v_1, \ldots, v_{n-1}, \lambda v_n)$, on obtient $\boxed{G(v_1, \ldots, v_{n-1}, \lambda v_n) = \lambda^2 G(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)}$

b) En effectuant successivement les manipulations $L_n \leftarrow L_n - \lambda L_1$ puis $C_n \leftarrow C_n - \lambda C_1$, on obtient l'égalité $\boxed{G(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_1) = G(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)}$

2. a) Comme $(v_i|w) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, tous les termes de la dernière colonne du déterminant $G(v_1, \ldots, v_n, w)$ sont nuls, à l'exception du terme d'indices $(n+1, n+1)$; on obtient donc, par développement par rapport à la dernière colonne $\boxed{G(v_1, \ldots, v_n, w) = \|w\|^2 \times G(v_1, \ldots, v_n)}$

b) On a $d(v, F) = \|v - \pi_F(v)\|$, où $\pi_F(v)$ est le projeté orthogonal de v sur F. On prouve de même qu'à la question **III.1.b**, que si $y \in \mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_n\}$ alors $G(v_1, \ldots, v_n, v + y) = G(v_1, \ldots, v_n, v)$. Si on applique cela avec $y = -\pi_F(v) \in F$, on obtient $G(v_1, \ldots, v_n, v) = G(v_1, \ldots, v_n, v - y)$ et, par définition d'un projecteur orthogonal, on a $v - \pi_F(v) \in \mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_n\}^\perp$, donc, d'après **III.2.a**, appliqué avec $w = v - \pi_F(v)$, on obtient $G(v_1, \ldots, v_n, v) = \|v - \pi_F(v)\|^2 \times G(v_1, \ldots, v_n)$, ce qui donne $\boxed{G(v_1, \ldots, v_n, v) = d(v, F)^2 \times G(v_1, \ldots, v_n)}$

3. a) Les fonctions $t \mapsto t^k e^{-t}$ sont $\mathcal{C}^0$ sur $[0, +\infty[$ et $t^k e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto t^k e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si $k \geqslant 0$ et $\boxed{J_k \text{ existe si } k \in \mathbb{N}}$

On effectue une intégration par parties pour trouver une relation entre J_k et J_{k+1} : si $k \geqslant 0$, les deux fonctions $t \mapsto -e^{-t}$ et $t \mapsto t^{k+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -t^{k+1}e^{-t} = 0$, donc on a :
$J_{k+1} = \Big[-t^{k+1}e^{-t}\Big]_0^{+\infty} + (k+1)\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t = (k+1)J_k$. Enfin, comme $J_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$, une récurrence immédiate donne $\boxed{J_k = k! \text{ si } k \in \mathbb{N}}$

b) On a $(e_i|e_j) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^i t^j e^{-t}\,\mathrm{d}t = J_{i+j}$ donc $\boxed{(e_i|e_j) = (i+j)!}$

c) On déduit de **III.2.b**, $G(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n) = d(e_n, \mathbb{R}_{n-1}[X])^2 \times G(e_1, \ldots, e_{n-1})$ et de la question précédente $G(e_1, \ldots, e_n) = D_n$. On a donc $D_n = d(e_n, \mathbb{R}_{n-1}[X])^2 \times D_{n-1}$ et comme $D_{n-1} \neq 0$ (on le savait car $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est libre donc $G(e_1, \ldots, e_{n-1}) > 0$ d'après **II**), on obtient $\boxed{d(e_n, \mathbb{R}_{n-1}[X]) = \sqrt{\dfrac{D_n}{D_{n-1}}} = n!}$