DM9

(Extrait de CCP PC 2002 maths 1)

Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. $\mathbb{K}$ désignant le corps des réels ou celui des complexes, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant n lignes et p colonnes. Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, I_n représentant la matrice identité.

Tout vecteur $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbb{K}^n$ est identifié à un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de X soit x_i. Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ aussi bien que le vecteur de $\mathbb{K}^n$ qui lui est associé.

Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = (x_i)_{1\leq i\leq p}$ dans $\mathbb{K}^p$, on note $(AX)_i$ le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne de AX.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A et on appelle rayon spectral de A le réel $\rho(A)$ défini par :

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}.$$

On qualifie de norme matricielle toute norme φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant la propriété :

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \varphi(AB) \leq \varphi(A)\cdot\varphi(B).$$

Partie I

1. Montrer que l'application $N_\infty : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}, A = (a_{i,j}) \mapsto \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Déterminer une constante k, dépendant de l'entier n, telle que

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, N_\infty(AB) \leqslant kN_\infty(A)N_\infty(B)$$

2. Dans cette question et la suivante, on suppose que $n = 3$ et que A est la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Calculer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, T^k puis la limite, quand k tend vers $+\infty$ de $\left[N_\infty\left(T^k\right)\right]^{1/k}$.

d) Vérifier que $\left[N_\infty\left(A^k\right)\right]^{1/k} \geqslant 2$; on pourra s'intéresser à la dernière colonne de A^k.

e) En utilisant les questions **I.1**, **I.2.b** et **I.2.c**, déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} \left[N_\infty\left(A^k\right)\right]^{1/k}$ et comparer cette valeur à $\rho(A)$.

3. On considère cette fois la matrice $B = \dfrac{1}{3}A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) En remarquant que B est semblable à $\dfrac{1}{3}T$, vérifier que $\rho(B) < 1$ et déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} B^k$.

b) Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} B^k$.
Simplifier le produit $(I_3 - B) \times S_p$ et déterminer $\lim\limits_{p\to+\infty} (I_3 - B) \times S_p$.

c) Vérifier que $I_3 - B$ est inversible puis démontrer que la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $(I_3 - B)^{-1}$.

d) Justifier qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $(I_3 - B)^{-1} = Q(B)$.

4. Dans cette question, on suppose que $n = 2$.

a) Soit $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer T^k et en déduire que la suite $\left(T^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si ($|\lambda| < 1$) ou ($\lambda = 1$ et $\mu = 0$).

b) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de A pour que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

c) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable. Montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $\rho(A) < 1$.
Dans ce cas, préciser $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k$.

d) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\rho(A)$ pour que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Partie II

1. Norme subordonnée à la norme N_∞.
On pose :

$$M_A = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

a) Montrer que $\forall X \in \mathbb{C}^n, N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X)$ et en déduire l'existence de $\tilde{N}_\infty(A) = \sup\limits_{X\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \left\{\dfrac{N_\infty(AX)}{N_\infty(X)}\right\}$.

b) Soient i_0 un entier compris entre 1 et n tel que $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = M_A$ et le vecteur Y de $\mathbb{C}^n$ de composantes y_j définies par :

$$y_j = \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} \text{ si } a_{i_0,j}\neq 0 \quad \text{et} \quad y_j = 1 \text{ si } a_{i_0,j} = 0.$$

Calculer $(AY)_{i_0}$ et en déduire $\tilde{N}_\infty(A) = M_A$.

2. Soit maintenant N une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier l'existence de $\tilde{N}(A) = \sup\limits_{X\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \left\{\dfrac{N(AX)}{N(X)}\right\}$. (*Il n'est pas demandé de déterminer la valeur de $\tilde{N}(A)$ en fonction des coefficients de la matrice A.*)

3. Montrer :

a) $\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX)\leq\tilde{N}(A)N(X)$.
b) $\tilde{N}(A) = 0 \Rightarrow A = 0_n$.
c) $\forall\lambda \in \mathbb{C}, \tilde{N}(\lambda A) = |\lambda|\tilde{N}(A)$.
d) $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \tilde{N}(A+B)\leq\tilde{N}(A) + \tilde{N}(B)$.
e) Déduire de ces résultats que $\tilde{N}$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On lui donne le nom de norme matricielle subordonnée à la norme N.

4. a) En considérant une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$, montrer que :

$$\rho(A)\leq\tilde{N}(A).$$

b) Montrer que si A est nilpotente non nulle, on a l'inégalité stricte :

$$\rho(A) < \tilde{N}(A).$$

5. Montrer que si $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0_n$, alors $\rho(A) < 1$.

Dans la suite de cette partie, on admettra que, réciproquement, si $\rho(A) < 1$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0_n$.

6. a) Montrer que pour tout k entier naturel non nul : $\rho(A)\leq \left[\tilde{N}\left(A^k\right)\right]^{\frac{1}{k}}$.

b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\rho(\alpha A) = |\alpha|\rho(A)$.

c) Soit $\varepsilon > 0$ et $A_\varepsilon = \dfrac{A}{\rho(A)+\varepsilon}$. Vérifier que $\rho(A_\varepsilon) < 1$ et en déduire l'existence d'un entier naturel k_ε tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left(k\geq k_\varepsilon \Rightarrow \tilde{N}\left(A^k\right) \leq (\rho(A)+\varepsilon)^k\right).$$

d) En déduire $\lim\limits_{k\to+\infty} \left[\tilde{N}\left(A^k\right)\right]^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.