Correction du DM9

(d'après CCP PC 2002 maths 1)

Problème I : Partie I

1. — $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
— $N_\infty(A)$ existe (tout ensemble fini de réels admet un maximum)
— $|a_{i,j}| \in \mathbb{R}^+$ donc $N_\infty(A) \in \mathbb{R}^+$.
— Si $N_\infty(A) = 0$ alors $\forall (i,j), |a_{i,j}| \leqslant 0$ donc $a_{i,j} = 0$ et $A = 0$.
— $N_\infty(\lambda A) = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |\lambda| \times |a_{i,j}| = |\lambda| \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| = |\lambda| N_\infty(A)$.
— $|a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \leqslant N_\infty(A) + N_\infty(B)$ donc $N_\infty(A+B) \leqslant N_\infty(A) + N_\infty(B)$ et on déduit de cela que $\boxed{N_\infty \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$

$|(AB)_{i,j}| = \left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{i,j}| \times |b_{k,j}| \leqslant n N_\infty(A) N_\infty(B$ donc $\boxed{N_\infty(AB) \leqslant n N_\infty(A) N_\infty(B)}$

2. a) $\mathcal{X}_A = (X-1)(X-2)^2$ puis $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 2$ et $\dim(E_2(A)) = 1 \neq m_2(A)$ donc $\boxed{A \text{ n'est pas DZ}}$

b) $u_1 = (1,0,1)$ est un vecteur propre associé à 1, $u_2 = (0,0,1)$ est un vecteur propre associé à 2 puis on cherche u_3 de sorte que $(A - 2I_3)u_3 = u_2$; le vecteur $u_3 = (-1,-1,0)$ convient. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on vérifie que $\det(P) = -1 \neq 0$ donc P est inversible et $\boxed{A = PTP^{-1}}$

c) On vérifie (par exemple par récurrence) que $T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$ donc $N_\infty(T^k) = k2^{k-1}$ (pour $k \geqslant 2$) et

$\left[N_\infty(T^k)\right]^{1/k} = \exp\left[\frac{1}{k}\left(\ln(k) + (k-1)\ln(2)\right)\right] \xrightarrow[k \to +\infty]{} \exp[\ln(2)]$ donc $\boxed{\lim\limits_{k \to +\infty} \left[N_\infty(T^k)\right]^{1/k} = 2}$

d) La dernière colonne de A^k est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2^k \end{pmatrix}$ donc $N_\infty(A^k) \geqslant 2^k$ et $\boxed{\left[N_\infty(A^k)\right]^{1/k} \geqslant 2}$

e) On a $A^k = PT^kP^{-1}$ donc, d'après **I.1**, $N_\infty(A^k) \leqslant 9N_\infty(P)N_\infty(P^{-1})N_\infty(T^k) = CN_\infty(T^k)$ puis on a l'encadrement $2 \leqslant \left[N_\infty(A^k)\right]^{1/k} \leqslant C^{1/k}\left[N_\infty(T^k)\right]^{1/k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 2$. Par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{k \to +\infty} \left[N_\infty(A^k)\right]^{1/k} = 2 = \rho(A)}$

3. a) Comme $A = PTP^{-1}$, on a $B = P\frac{1}{3}TP^{-1}$ donc $\mathrm{Sp}(B) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ et $\boxed{\rho(B) = \frac{2}{3}}$

$\frac{1}{3^k}T^k = \frac{1}{3^k}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$ donc $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{3^k}T^k = 0$ puis par produit de limites de matrices (cf cours) $\lim\limits_{k \to +\infty} B^k = P\left(\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{3^k}T^k\right)P^{-1}$ et $\boxed{\lim\limits_{k \to +\infty} B^k = 0}$

b) On a, par commutativité de B et I_3, $\boxed{(I_3 - B)S_p = I_3 - B^{p+1} \xrightarrow[p \to +\infty]{} I_3}$

c) $1 \notin \mathrm{Sp}(B)$ donc $I_3 - B$ est inversible. On en déduit $S_p = (I_3 - B)^{-1} \times (I_3 - B)S_p$ et, toujours par limite de produit matriciel, $\lim\limits_{p \to +\infty} S_p = (I_3 - B)^{-1} \times \lim\limits_{p \to +\infty} (I_3 - B)S_p = (I_3 - B)I_3$ donc $\boxed{\lim\limits_{p \to +\infty} S_p = (I_3 - B)^{-1}}$

d) Si $Q \in \mathbb{C}[X]$, on a $(I_3 - B)^{-1} = Q(B)$ si et seulement si $\left(I_3 - \frac{1}{3}T\right)^{-1} = Q\left(\frac{1}{3}T\right)$; on vérifie alors que $Q\left(\frac{1}{3}T\right) = \begin{pmatrix} Q(1/3) & 0 & 0 \\ 0 & Q(2/3) & Q'(2/3)/3 \\ 0 & 0 & Q(2/3) \end{pmatrix}$ et $\left(I_3 - \frac{1}{3}T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Il suffit donc de trouver Q tel que $\begin{cases} Q(1/3) = 3/2 \\ Q(2/3) = 3 \\ Q'(2/3) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 6b + 18c = 27 \\ 4a + 6b + 9c = 27 \\ 4a + 3b = 27 \end{cases}$ pour $Q = aX^2 + bX + c$. Ainsi $Q = \frac{27}{2}X^2 - 9X + 3$ convient.

4. a) Par récurrence $T^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1}\mu \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$ donc (T^k) converge si et seulement si (λ^k) et $(k\lambda^{k-1}\mu)$ convergent.

Si $|\lambda| > 1$ alors $\lim\limits_{k \to +\infty} |\lambda|^k = +\infty$ donc (T^k) diverge. Si $|\lambda| < 1$ alors $\lim\limits_{k \to +\infty} \lambda^k = \lim\limits_{k \to +\infty} k\lambda^{k-1}\mu = 0$ donc (T^k)

converge vers 0. Si $|\lambda| = 1$ et $\mu \neq 0$ alors $\lim\limits_{k\to+\infty} |k\lambda^{k-1}\mu| = +\infty$ donc (T^k) diverge. Enfin, si $|\lambda| = 1$ et $\mu = 0$ alors $(T^k) = (\lambda^k I_2)$ converge si et seulement si $\lambda = 1$.

En résumé, $\boxed{(T^k) \text{ converge si et seulement si } |\lambda| < 1 \text{ (et } T^k \text{ tend vers 0) ou } \lambda = 1 \text{ et } \mu = 0 \text{ (donc } T = I_2)}$

b) A est semblable à $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ donc (A^k) converge si et seulement si (B^k) converge (par produit de limites matricielles) donc si et seulement si $|\lambda| < 1$ et $|\mu| < 1$ (et B^k tend vers 0) ou $|\lambda| < 1$ et $\mu = 1$ (et B^k tend vers $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) ou $\lambda = 1$ et $|\mu| < 1$ (et B^k tend vers $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$) ou $\lambda = \mu = 1$ (et $A = I_2$).

En résumé $\boxed{(A^k) \text{ converge si et seulement si } \rho(A) < 1 \text{ ou } \rho(A) = 1 \text{ et } \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A), |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1}$

c) Si A est non diagonalisable alors A admet une seule valeur propre double et est semblable à T avec $\mu \neq 0$ (sinon $B = \lambda I_2$ et A serait DZ). Donc (A^k) converge si et seulement si $\boxed{|\lambda| = \rho(A) < 1}$ Dans ce cas $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$.

d) En examinant les cas A diagonalisable et A non diagonalisable, on a $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0 \text{ si et seulement si } \rho(A) < 1}$

Partie II

1. a) Si $i \in [\![1, n]\!]$, $|(AX)_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant N_\infty(X)\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant M_A N_\infty(X)$ donc $N_\infty(AX) \leqslant M_A N_\infty(X)$. On en déduit que l'ensemble $\left\{\dfrac{N_\infty(AX)}{N_\infty(X)}, X \neq 0\right\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide (il contient $N_\infty(AE_1)$) et majoré par M_A donc admet une borne supérieure et, par définition de la borne supérieure, on a $\tilde{N}_\infty(A)$, on a $\boxed{\tilde{N}_\infty(A) \leqslant M_A}$

b) Y est tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|y_i| = 1$ et $a_{i_0 j}y_j = |a_{i_0 j}|$, on a alors $N_\infty(Y) = 1$ et $(AY)_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}y_j = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| = M_A$ donc $N_\infty(AY) \geqslant M_A N_\infty(Y)$ ce qui donne $\tilde{N}_\infty(A) \geqslant M_A$ puis, avec la question précédente, $\boxed{\tilde{N}_\infty(A) = M_A}$

2. De même, l'ensemble $\Gamma = \left\{\dfrac{N(AX)}{N(X)}, X \neq 0\right\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide ; reste à prouver qu'il est majoré : par équivalence des normes en dimension finie, il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N \leqslant N_\infty \leqslant \beta N$; on a alors $N(AX) \leqslant \dfrac{1}{\alpha}N_\infty(AX) \leqslant \dfrac{1}{\alpha}M_A N_\infty(X) \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha}M_A N(X)$ donc Γ est majoré par $\dfrac{\beta}{\alpha}M_A$ donc admet une borne supérieure.

3. a) Évident par définition de la borne supérieure (majore Γ) si $X \neq 0$ et valable pour $X = 0$ puisque $N(A0) = 0$.

b) Si $\tilde{N}(A) = 0$ alors $N(AX) \leqslant 0$ pour tout $X \in \mathbb{C}^n$ d'après **II.3.B** donc $AX = 0$ pour tout $X \in \mathbb{C}^n$ et $A = 0$.

c) Si $X \neq 0$ alors $\dfrac{N(\lambda AX)}{N(X)} = |\lambda|\dfrac{N(AX)}{N(X)} \leqslant |\lambda|\tilde{N}(A)$ donc $\tilde{N}(\lambda A) = |\lambda|\tilde{N}(A)$.

d) Si $X \neq 0$ alors $\dfrac{N((A+B)X)}{N(X)} \leqslant \dfrac{N(AX)}{N(X)} + \dfrac{N(BX)}{N(X)} \leqslant \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B)$ donc $\tilde{N}(A+B) \leqslant \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B)$.

e) On vient déjà de prouver que $\tilde{N}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $X \neq 0$ alors, d'après **II.3.a**, $N(ABX) \leqslant \tilde{N}(A)N(BX) \leqslant \tilde{N}(A)\tilde{N}(B)N(X)$ donc $\dfrac{N(ABX)}{N(X)} \leqslant \tilde{N}(A)\tilde{N}(B)$; on en déduit $\tilde{N}(AB) \leqslant \tilde{N}(A)\tilde{N}(B)$ donc

$\boxed{\tilde{N} \text{ est une norme matricielle sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$

4. a) Si $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$ alors $|\lambda|N(X) = N(AX) \leqslant \tilde{N}(A)N(X)$ donc comme $X \neq 0$, on a $\boxed{\rho(A) = |\lambda| \leqslant \tilde{N}(A)}$

b) Si A est nilpotente alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que X^p soit annulateur de A donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ (le spectre complexe n'est pas vide) et $\rho(A) = 0$; comme $A \neq 0$, on a $\tilde{N}(A) > 0$ donc $\boxed{\rho(A) < \tilde{N}(A)}$

5. On a $0 \leqslant \rho(A)^k = \rho\left(A^k\right) \leqslant \tilde{N}\left(A^k\right) \leqslant \left[\tilde{N}(A)\right]^k$ donc si $A^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ alors $\lim \rho(A)^k = 0$ ce qui donne $\boxed{\rho(A) < 1}$

6. a) Fait juste avant !

b) Si $\alpha \neq 0$ alors $\mathcal{X}_{\alpha A}(\lambda) = \det(\lambda I_n - \alpha A) = \alpha^n \det\left(\dfrac{\lambda}{\alpha}I_n - A\right) = \alpha^n \mathcal{X}_A\left(\dfrac{\lambda}{\alpha}\right)$ donc $\mathrm{Sp}(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{Sp}(A)$, ce qui reste valable si $\alpha = 0$. On en déduit $\boxed{\rho(\alpha A) = |\alpha|\rho(A)}$ *(On peut aussi le prouver en trigonalisant A)*

c) $\rho(A_\varepsilon) = \dfrac{\rho(A)}{\rho(A) + \varepsilon} < 1$ donc, avec le résultat admis, $A_\varepsilon^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc $\exists k_\varepsilon, k \geqslant k_\varepsilon \Rightarrow \tilde{N}\left(\dfrac{A^k}{(\rho(A)+\varepsilon)^k}\right) \leqslant 1$.

d) On a donc $\forall \varepsilon > 0, k \geqslant k_\varepsilon \Rightarrow \rho(A) \leqslant \left[\tilde{N}\left(A^k\right)\right]^{\frac{1}{k}} \leqslant \rho(A) + \varepsilon$, ce qui signifie que $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} \left[\tilde{N}\left(A^k\right)\right]^{\frac{1}{k}} = 0}$