

Dans ce problème, on considère la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^\alpha},$$

où α est un réel strictement positif et $x \in \mathbb{R}^+$.

Lorsque la série converge, on notera S la somme de la série des $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur \mathbb{R}^+ si et seulement si $\alpha > 1$.

2. En déduire que la fonction S est continue sur \mathbb{R}^+ si $\alpha > 1$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin(kx)$ et $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$.

a) Montrer que, si $x \in]0, 2\pi[$, on a $A_n(x) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$.

b) Montrer que $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) A_k(x) + \frac{A_n(x)}{(n+1)^\alpha}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ et que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) A_n(x).$$

d) En déduire que S est continue sur $]0, 2\pi[$ pour tout $\alpha > 0$.

4. Dans cette question, on suppose $\alpha \in]0, 1]$. Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

a) Montrer que $R_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) - R_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) \geq \frac{n^{1-\alpha}}{2^\alpha} \sin \frac{(n+1)\pi}{4n}$.

b) En déduire que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, 2\pi[$.

5. On suppose cette fois que $\alpha = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$, on pose $I_n(x) = \int_{n-1/2}^{n+1/2} \frac{\sin(xt)}{t} dt$.

a) Montrer, à l'aide d'un changement de variable notamment, que

$$I_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\cos(xt)}{1+t/n} dt + \frac{\cos(nx)}{n} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin(xt)}{1+t/n} dt \tag{1}$$

b) Montrer que, pour $n \geq 1$, $\left| \int_{-1/2}^{1/2} \cos(xt) \left(\frac{1}{1+t/n} - 1 \right) dt \right| \leq \frac{1}{n}$.

c) En déduire qu'il existe une suite de fonctions $(v_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$\frac{\sin(nx)}{n} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\cos(xt)}{1+t/n} dt = \frac{\sin(x/2)}{x/2} \frac{\sin(nx)}{n} + v_n(x) \quad \text{et} \quad |v_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

d) En utilisant la même démarche sur le second terme dans l'expression de $I_n(x)$ donnée par (1), montrer que l'on peut écrire

$$I_n(x) = \frac{\sin(x/2)}{x/2} \frac{\sin(nx)}{n} + w_n(x) \quad \text{et} \quad |w_n(x)| \leq \frac{2}{n^2}$$

e) Montrer que w_n est continue sur \mathbb{R} .

f) On pose alors $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x)$. Montrer que T est continue sur \mathbb{R} .

g) Justifier l'existence de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$; on admettra que la valeur de cette intégrale est $J = \frac{\pi}{2}$.

h) Déduire des questions précédentes que S n'est pas continue en 0 (pour $\alpha = 1$).