Correction du DM10

1. $\|u_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^\alpha}$ donc $\boxed{\sum u_n \text{ CVN sur } \mathbb{R}^+ \text{ si et seulement si } \alpha > 1}$

2. Si $\alpha > 1$ alors
H1 : les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$.
H2 : $\sum u_n$ CVN sur $\mathbb{R}^+$.
donc $\boxed{S \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+ \text{ pour } \alpha > 1}$

3. a) $A_n(x) = \operatorname{Im}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)$ et $e^{ix} \neq 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ donc $\boxed{A_n(x) = \dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}}$

b) Comme $\sin(kx) = A_k(x) - A_{k-1}(x)$ (en posant $A_0(x) = 0$), on a $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}(A_k(x) - A_{k-1}(x))$, puis $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k(x)}{k^\alpha} - \sum_{p=1}^{n-1}\frac{A_p(x)}{(p+1)^\alpha}$ donc $\boxed{S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k(x)\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) + \frac{A_n(x)}{(n+1)^\alpha}}$

c) $|A_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{A_n(x)}{(n+1)^\alpha} = 0$ et $\left|A_k(x)\left(\dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\right)\right| \leqslant \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left(\dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$ qui est le terme général d'une série convergente par télescopage ; par majoration, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} A_n(x)\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)$ est ACV puis $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(x) \text{ CV et } S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(x)\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)}$

d) On pose $f_n(x) = A_n(x)\left(\dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}\right)$ et on vérifie la CVN sur $[a, 2\pi - a] \subset]0, 2\pi[$: on a $|A_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sin\frac{a}{2}}$ donc $\|A_n\|_{\infty,[a,2\pi-a]} \leqslant \dfrac{1}{\sin\frac{a}{2}}\left(\dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}\right)$ donc $\sum f_n$ CVN sur tout segment de $]0, 2\pi[$. On peut donc rédiger le théorème :
H1 : les fonctions f_n sont continues sur $]0, 2\pi[$
H2 : $\sum f_n$ CVN sur tout segment de $]0, 2\pi[$
donc $\boxed{S \text{ est continue sur }]0, 2\pi[}$

4. a) $R_n\left(\dfrac{\pi}{4n}\right) - R_{2n}\left(\dfrac{\pi}{4n}\right) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin\frac{k\pi}{4n}}{k^\alpha} \geqslant \sin\frac{(n+1)\pi}{4n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^\alpha}$ car $\dfrac{k\pi}{4n} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur lequel sin est croissante ; puis $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^\alpha} \geqslant n\frac{1}{(2n)^\alpha}$ ce qui donne $\boxed{R_n\left(\dfrac{\pi}{4n}\right) - R_{2n}\left(\dfrac{\pi}{4n}\right) \geqslant \dfrac{n^{1-\alpha}}{2^\alpha}\sin\dfrac{(n+1)\pi}{4n}}$

b) Comme $\left|R_{2n}\left(\dfrac{\pi}{4n}\right) - R_n\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)\right| \leqslant \|R_n\|_{\infty,]0,2\pi[} + \|R_{2n}\|_{\infty,]0,2\pi[}$, on en déduit que $(\|R_n\|_{\infty,]0,2\pi[})_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{(n+1)\pi}{4n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\left(n^{1-\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 pour $\alpha \leqslant 1$. Ainsi on peut donc conclure que $\boxed{\sum u_n \text{ ne CV pas uniformément sur }]0, 2\pi[}$

5. a) On pose $t = n + u$: $u \mapsto n + u$ est $\mathcal{C}^1$, bijectif, strictement croissante de $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ sur $\left[n - \dfrac{1}{2}, n + \dfrac{1}{2}\right]$ donc $I_n(x) = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\sin(nx + xu)}{n + u}\,\mathrm{d}u$, ce qui donne ensuite le résultat en développant $\sin(nx + nu)$.

b) On a $\left|\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}\cos(xt)\left(\frac{1}{1+t/n} - 1\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}\frac{|t\cos(xt)|}{1+t/n}\,\mathrm{d}t$ puis, si $|t| \leqslant \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{|t\cos(xt)|}{1+t/n} \leqslant \dfrac{1/2}{1 - \frac{1}{2n}} \leqslant 1$ si $n \geqslant 1$. On obtient donc $\boxed{\left|\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}\cos(xt)\left(\frac{1}{1+t/n} - 1\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}}$

c) Comme $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(x/2)}{x/2}$, il suffit de poser $v_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}\cos(xt)\left(\frac{1}{1+t/n} - 1\right)\mathrm{d}t$ en vérifiant, grâce à la question précédente que $|v_n(x)| \leqslant \dfrac{|\sin(nx)|}{n^2}$ donc $\boxed{|v_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}}$

d) Cette fois on a $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \sin(xt)\,\mathrm{d}t = 0$ et si on pose $\widetilde{v_n}(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n}\left|\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \sin(xt)\left(\dfrac{1}{1+t/n} - 1\right)\mathrm{d}t\right|$ alors on vérifie de même que $|\widetilde{v_n}(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \dfrac{|t\sin(xt)|}{1+t/n}\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. On termine en posant $w_n(x) = v_n(x) + \widetilde{v_n}(x)$.

e) On commence par prouver que v_n est continue sur $\mathbb{R}$: comme $x \mapsto \sin(nx)$ est continue sur $\mathbb{R}$, il suffit de prouver que $x \mapsto \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \cos(xt)\left(\dfrac{1}{1+t/n} - 1\right)\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$; on utilise donc le théorème de continuité des intégrales à paramètres en posant $f(x,t) = \cos(xt)\left(\dfrac{1}{1+t/n} - 1\right)$ (l'entier n étant fixé) :

H1 : pour $t \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

H2 : pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

H3 : pour $t \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ et $x \in \mathbb{R}$, $|f(x,t)| \leqslant \left|\dfrac{1}{1+t/n} - 1\right| = \varphi(t)$, indépendante de x, continue par morceaux sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ donc intégrable sur ce segment.

On en déduit que v_n est continue sur $\mathbb{R}$; on procède de même pour $\widetilde{v_n}$ et, par somme, $\boxed{w_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

f) On a :
H1 : les fonctions w_n sont continues sur $\mathbb{R}$.
H2 : $\sum w_n$ CVN sur $\mathbb{R}$ car $\|w_n\|_\infty \leqslant \dfrac{2}{n^2}$
On en déduit que $\boxed{T \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

g) Fait en cours (intégration)

h) Comme l'intégrale J existe, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n(x) = \int_{1/2}^{+\infty} \dfrac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$, puis on pose $u = xt$: $u \mapsto \dfrac{u}{x}$ est $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante de $\left[\dfrac{x}{2}, +\infty\right[$ sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ pour $x > 0$, ce qui donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n(x) = \int_{x/2}^{+\infty} \dfrac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$.

En sommant les égalités de **5.d**, on obtient $\displaystyle\int_{x/2}^{+\infty} \dfrac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \dfrac{\sin(x/2)}{x/2} S(x) + T(x)$ si $x \in]0, 2\pi[$.

Enfin, comme $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_{x/2}^{+\infty} \dfrac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u = J$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x/2)}{x/2} = 1$ et $\displaystyle\lim_0 T = T(0) = 0$ par continuité en 0, on en déduit $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} S(x) = J = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} S(x) \neq 0 = S(0)$ et $\boxed{S \text{ n'est pas continue à droite en } 0}$