# DM11

(Extrait de CCP PSI 2008 Maths 2)

---

Étant donné un endomorphisme $l$, pour tout $x$ de $E$ et tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ on définit $L_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} l^k(x)$. En prenant différentes hypothèses pour $E$ et pour $l$ on étudie la limite de la suite $\Big(L_n(x)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

## PARTIE I : EXEMPLES

Dans cette partie $E$ est un espace euclidien de dimension 4, rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

**1.** Soit $s$ l'endomorphisme de $E$ défini par sa matrice $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Réduction de l'endomorphisme $s$.

i. Calculer la matrice $S^2$. Justifier l'affirmation : l'endomorphisme $s$ est diagonalisable.

ii. En déduire que 1 et $-1$ sont <u>les</u> valeurs propres de $s$.

On note $E_1$ et $E_{-1}$ les sous-espaces propres de $s$ respectivement associés aux valeurs propres 1 et $-1$. Il résulte des questions précédentes que $E_1$ et $E_{-1}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $E$.

iii. Calculer la trace de $s$. En déduire la dimension de $E_1$ et celle de $E_{-1}$.

b) On considère les trois vecteurs suivants de $E$ : $u_1 = e_1 + e_3 + e_4$, $u_2 = e_1 + e_2 + 2e_4$ et $u_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.

i. Déterminer les vecteurs $s(u_1)$ et $s(u_2)$. En déduire que $(u_1, u_2)$ est une base de $E_1$.
Déterminer une base orthonormale de $E_1$.

ii. Déterminer un vecteur non nul $u_4 = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ orthogonal aux trois vecteurs $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
En déduire que $(u_3, u_4)$ forme une base orthogonale de $E_{-1}$.

c) Pour tout $x$ de $E$ et tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ on pose $S_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} s^k(x)$.

i. Pour $x \in E$ fixé, on note $x = y + z$ avec $y \in E_1$ et $z \in E_{-1}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$, déterminer un réel $\alpha_k$ tel que $s^k(x) = y + \alpha_k z$.
En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, un réel $\beta_n$ tel que $S_n(x) = y + \beta_n z$.

ii. Déduire de ce qui précède que la suite $\Big(S_n(x)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $E$ a une limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
Exprimer cette limite en fonction de $x$ et de $s(x)$.

**2.** Soit $\ell$ l'endomorphisme de $E$ défini par sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\ell) = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Une propriété concernant les normes.

i. Pour tout vecteur $u = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ de $E$ calculer $\|u\|^2 - \|\ell(u)\|^2$.
Prouver l'inégalité $\|\ell(u)\| \leqslant \|u\|$.

ii. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur $u$ vérifie l'égalité $\|\ell(u)\| = \|u\|$.
Déterminer $\max\limits_{\|u\|=1} \|\ell(u)\|$.

iii. Montrer que 1 est valeur propre de $\ell$ et que le sous-espace propre associé est de dimension 2.

b) Réduction de l'endomorphisme $\ell$.

i. Déterminer le polynôme caractéristique de $\ell$.

ii. Montrer que $\ell$ possède une autre valeur propre $\lambda \neq 1$ que l'on déterminera.
Justifier que les sous-espaces propres $G_1$ et $G_\lambda$ de $\ell$ associés aux valeurs propres 1 et $\lambda$ sont supplémentaires dans $E$.

c) Pour tout $x$ de $E$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $L_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ell^k(x)$.

Soit $x \in E$. On note $x = y + z$ avec $y \in G_1$ et $z \in G_\lambda$.

i. Pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer $\ell^k(x)$ en fonction de $y$, $z$ et $k$.

ii. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ exprimer $L_n(x)$ en fonction de $y$, $z$ et $n$.

En déduire que la suite $\Big(L_n(x)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $E$ a une limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

**3.** Soit $t$ l'endomorphisme de $E$ défini par sa matrice $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $T$ est une matrice orthogonale.

b) On considère les deux vecteurs suivants de $E$ : $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_3 + e_4)$ et $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - e_4)$.

i. On note $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1, \varepsilon_1)$. Déterminer les vecteurs $t(e_1)$ et $t(\varepsilon_1)$.

En déduire que $F_1$ est un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension 2, stable par $t$.

ii. Soit $F_2 = F_1^\perp$ l'orthogonal du sous-espace $F_1$. Montrer que $F_2$ est stable par $t$.

Montrer que $(e_2, \varepsilon_2)$ est une base de $F_2$.

La famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (e_1, \varepsilon_1, e_2, \varepsilon_2)$ est donc une base de $E$.

c) On note $T' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(t)$.

i. Justifier que la matrice $T'$ est orthogonale. Expliciter $T'$.

ii. Soit $\theta = \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$. Exprimer la matrice $T'$ en fonction de $\theta$.

On oriente le plan $F_1$ par la base $(e_1, \varepsilon_1)$ (respectivement on oriente le plan $F_2$ par la base $(e_2, \varepsilon_2)$).

Préciser la nature géométrique de l'endomorphisme de $F_1$ (respectivement de $F_2$) induit par $t$.

iii. Pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer en fonction de $\theta$ et $k$ la matrice de $t^k$ relativement à la base $\mathcal{B}'$.

d) Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\zeta_n(\omega) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\omega}$.

Expliciter $\zeta_n(\omega)$ selon les valeurs de $\omega$.

En déduire les réels $\omega$ pour lesquels la suite complexe $(\zeta_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

e) Pour tout $x$ de $E$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $T_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k(x)$.

i. Justifier que le sous-espace $F_1$ est stable par $T_n$.

ii. Soit $y = \alpha e_1 + \beta \varepsilon_1 \in F_1$.

On note $t^k(y) = \gamma_k e_1 + \delta_k \varepsilon_1, \quad T_n(y) = \lambda_n e_1 + \mu_n \varepsilon_1$.

A. Déterminer la matrice $V_k \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} \gamma_k \\ \delta_k \end{pmatrix} = V_k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

En déduire la matrice $U_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} \lambda_n \\ \mu_n \end{pmatrix} = U_n \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

On exprimera $V_k$ en fonction de $\theta$ et $k$, et $U_n$ en fonction de $\theta$ et $n$.

B. Montrer que la suite $(T_n(y))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $E$ a une limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

iii. Soit $x \in E$. En écrivant $x = y + z$ avec $y \in F_1$ et $z \in F_2$, montrer que la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

# PARTIE II

**1.** Dans cette question, on considère l'espace $\mathbb{R}^n$ canoniquement euclidien et on fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|AX\| \leqslant \|X\|$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ (on confond un vecteur $x$ de $\mathbb{R}^n$ et sa matrice colonne $X$, dans la base canonique)

a) Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|A^T X\| \leqslant \|X\|$

b) Montrer que si $X \in \mathbb{R}^n$ vérifie $AX = X$ alors $\|A^T X - X\|^2 \leqslant 0$.

Montrer l'égalité $\ker(A - I_n) = \ker(A^T - I_n)$.

c) En déduire que $\ker(A - I_n)$ et $\mathrm{Im}(A - I_n)$ sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$. (on pourra commencer par démontrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\ker(M^T) = \mathrm{Im}(M)^\perp$.)

**2.** Dans cette question, on suppose que $E$ est un espace vectoriel normé de dimension finie et que $\ell$ est un endomorphisme de $E$ tel que $\forall x \in E, \|\ell(x)\| \leqslant \|x\|$.

Soit $x \in E$. Montrer que la suite $(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite et la déterminer.