Correction du DM12

(Extrait de CCP MP 2014 maths 2)

Questions préliminaires :

1. Cours !

2. a) Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$, on a $s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \varepsilon_i$ donc comme β est orthonormale, on a $\boxed{R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2}$

b) On a $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2$ et comme $\lambda_1 \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_n$, on a $\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant R_s(x) \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, ce qui donne bien $\boxed{\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant R_s(x) \leqslant \lambda_n \|x\|^2}$

3. a) On a $R_s(\varepsilon_1) = \lambda_1$, car $\|\varepsilon_1\| = 1$, donc si $s \in \mathcal{S}^+(E)$, on a $R_s(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$ donc $\lambda_1 \geqslant 0$ et si $s \in \mathcal{S}^{++}(E)$, comme $\varepsilon_1 \neq 0$, on a $\lambda_1 = R_s(\varepsilon_1) > 0$.

Remarque : on a aussi reprouvé la réciproque car si $\lambda_1 \geqslant 0$ (resp. $\lambda_1 > 0$), on a $R_s(x) \geqslant \lambda_1 \|x\|^2 \geqslant 0$ (resp. $R_s(x) \geqslant \lambda_1 \|x\|^2 > 0$ si $x \neq 0$).

b) On a $s_{i,j} = \langle e_i | s(e_j) \rangle$ donc $s_{i,i} = \langle e_i | s(e_i) \rangle = R_s(e_i)$ et e_i est unitaire. Avec **2.b**, on a $\boxed{\lambda_1 \leqslant s_{i,i} \leqslant \lambda_n}$

Partie II

1. On a $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$ car le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de A est unitaire, on en déduit $\boxed{|a_{i,j}| \leqslant 1}$

2. a) Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P \Delta P^T$, puis $T(A) = \mathrm{Tr}((AP\Delta)P^T) = \mathrm{Tr}(P^T(AP\Delta))$ et, comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit, $\boxed{B = P^T AP \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$

b) Si $B = (b_{i,j})$ alors $\mathrm{Tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i} \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |b_{i,i}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}(S)$ d'après **II.1**. Comme $\mathrm{Tr}(S) = T(I_n)$ et $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\boxed{\max_{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} T(A) = \mathrm{Tr}(S)}$

Partie III

1. On a $\det(S) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leqslant \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^n$ d'après l'inégalité arithmético-géométrique (avec $\lambda_i \geqslant 0$) ce qui donne bien $\boxed{\det(S) \leqslant \left(\frac{1}{n} \mathrm{Tr}(S) \right)^n}$

2. On a $S_\alpha^T = D^T S^T D = S_\alpha$ car S est symétrique et si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors $X^T S_\alpha X = (DX)^T S (DX) \geqslant 0$ car $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $DX \in E$ donc $\boxed{S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$

On vérifie que les coefficients diagonaux de S_α sont $\alpha_i^2 s_{i,i}$ donc $\boxed{\mathrm{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 s_{i,i}}$

3. Pour cette valeur de α, on a $\mathrm{Tr}(S_\alpha) = n$ et $\det(S_\alpha) = \det(D)^2 \det(S) = \det(S) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{s_{i,i}}$. En appliquant **III.1** à la matrice S_α, on a $\det(S) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{s_{i,i}} \leqslant 1^n$ donc $\boxed{\det(S) \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}}$

4. Il s'agit de montrer que $\det(S) = 0$ s'il existe un indice i tel que $s_{i,i} = 0$; or d'après **I.3.b**, s'il existe i tel que $s_{i,i} = 0$ alors $\lambda_1 \leqslant 0$, on en déduit $\lambda_1 = 0$ donc 0 est valeur propre de S et $\det(S) = 0$.

5. L'inégalité d'Hadamard s'obtient directement en remarquant que $\det(S) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Partie IV

1. On vérifie $B^T = B$ car $A^T = A$, et si $X \neq 0$ alors $X^T B X = (\Omega X)^T A (\Omega X) > 0$ car comme Ω est inversible, on a $\Omega X \neq 0$. On a donc $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$; enfin, $\det(B) = \det(\Omega)^2 \det(A) = 1^3$ donc $\boxed{B \in \mathcal{U}}$ Pour finir, on a $\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}((A\Omega\Delta)\Omega^T) = \mathrm{Tr}(\Omega^T(A\Omega\Delta))\boxed{= \mathrm{Tr}(B\Delta)}$

2. L'application $A \mapsto \Omega^T A \Omega$ est une bijection de $\mathcal{U}$ sur lui-même (sa réciproque est $B \mapsto \Omega B \Omega^T$) donc les deux ensembles sont égaux : $\boxed{\{\mathrm{Tr}(AS), A \in \mathcal{U}\} = \{\mathrm{Tr}(B\Delta), B \in \mathcal{U}\}}$

Comme $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, ses coefficients diagonaux sont positifs donc ceux de $B\Delta$ aussi et $\mathrm{Tr}(B\Delta) \geqslant 0$. On en déduit que $\{\mathrm{Tr}(B\Delta, B \in \mathcal{U}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide (car $I_n \in \mathcal{U}$ donc $\mathrm{Tr}(\Delta)$ appartient à cet ensemble) et minorée par 0 donc $\boxed{m = \inf\{\mathrm{Tr}(AS), A \in \mathcal{U}\} \text{ existe}}$

3. On a $\mathrm{Tr}(B\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i} \geqslant n \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i}\right)^{1/n}$ d'après l'inégalité arithmético-géométrique : on peut en effet l'appliquer car $\lambda_i \geqslant 0$ et comme $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $b_{i,i} \geqslant 0$ d'après **I.3.b**.

4. On a $\det(S) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ et, en appliquant l'inégalité d'Hadamard à B, on a $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} b_{i,i} \geqslant \det(B) = 1$. On a donc bien $\boxed{\mathrm{Tr}(B\Delta) \geqslant n(\det(S))^{1/n}}$

5. On a déjà $m \geqslant n(\det(S))^{1/n}$. On vérifie que $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\det(D) = \det(S)\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} = 1$ donc $D \in \mathcal{U}$ et $m \leqslant \mathrm{Tr}(D\Delta) = \mathrm{Tr}\left((\det(S))^{1/n} I_n\right) = n(\det(S))^{1/n}$. On en déduit $\boxed{m = n(\det(S))^{1/n}}$