

Partie I : le polylogarithme

Dans toute cette partie, α est un réel fixé.

1. a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière L_α définie par :

$$L_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

- b) Justifier que l'application L_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.
 c) Montrer que : $\forall x \in] -1, 1[, L_\alpha(-x) + L_\alpha(x) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(x^2)$.
 2. a) Pour $x \in] -1, 1[$, établir une relation entre $L'_{\alpha+1}(x)$ et $L_\alpha(x)$.
 b) Pour $x \in] -1, 1[$, préciser les valeurs de $L_\alpha(x)$ lorsque $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ et $\alpha = 1$.
 3. Dans cette question, on suppose $\alpha \leq -1$.
 Montrer que $L_\alpha(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Partie II : expression intégrale

Dans cette partie, α est un réel strictement supérieur à 1.

1. a) Montrer que L_α est continue sur $[-1, 1]$.
 b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} L'_2(x)$ et préciser si la fonction L_2 est dérivable en 1.
 2. a) Montrer que, si $x \leq 1$, l'application $\varphi_x : u \mapsto \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
 Pour $x \leq 1$, on posera dans la suite

$$K_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x} du$$

- b) Prouver l'existence de $G_\alpha = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ et justifier que $G_\alpha > 0$.
 3. a) Montrer que pour $x \in [-1, 1]$, on a $xK_\alpha(x) = G_\alpha L_\alpha(x)$.
 b) En déduire que L_α se prolonge en une fonction continue sur $] -\infty, 1]$ et $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 1[$.
 Donner la valeur de $L'_\alpha(x)$ pour $x < 1$.
 c) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 \notin]1, +\infty[$, on a encore la relation :

$$L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(z^2)$$

Partie III : le cas $\alpha = 2$

On admettra dans cette partie que $L_2(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Déterminer la valeur de $L_2(-1)$.
 2. a) Montrer que $\phi : x \mapsto L_2(x) + L_2(1-x) + \ln(x) \ln(1-x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$.
 b) En déduire que ϕ est constante sur $]0, 1[$ et déterminer la valeur de $L_2\left(\frac{1}{2}\right)$.
 3. Prouver que

$$\forall x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right], L_2(x) + L_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{1}{2} [\ln(1-x)]^2$$