(extrait de Centrale MP 2016 maths 2)

Partie I : Suites et intégrales

On admet que
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

1. À l'aide d'un changement de variable, montrer
$$\forall s \in \mathbb{R},\ |s| = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

2. Dans cette section, on étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

a) Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser la monotonie de la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Montrer que $u_1 = u_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

c) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}v_n \quad \text{avec} \quad v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\cos(\sqrt{2u/n})\right)^n}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

d) Montrer que
$$\forall (n,u) \in \mathbb{N}^*\times]0,1],\ \left|1-\left(\cos(\sqrt{2u/n})\right)^n\right| \leqslant u$$

e) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie l vérifiant
$$l = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

f) On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

Conclure que $u_n \sim \sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}$.

Partie II : Autour du pile ou face

Dans cette partie, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\{1,-1\}$ et telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

L'espérance d'une variable aléatoire réelle finie Z est notée $E(Z)$ et sa variance $V(Z)$.

1. Étude de $E(|S_n|)$

a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

b) Soit S et T deux variables aléatoires réelles finies indépendantes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose que T et $-T$ ont même loi.

Montrer que $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))$.

c) On considère la fonction φ_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi_n(t) = E(\cos(S_n t))$ pour tout réel t.

Montrer que $\varphi_n(t) = (\cos t)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t.

d) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(|S_n|) = \dfrac{2}{\pi}u_n$.

On utilisera l'expression intégrale de la valeur absolue obtenue au début de la partie I.

2. Étude de $\dfrac{S_n}{n}$

On se propose de démontrer que la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0, c'est-à-dire qu'il existe un événement $\mathcal{Z} \in \mathscr{A}$ tel que $P(\mathcal{Z}) = 0$ et
$$\forall \omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z},\ \frac{S_n(\omega)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$U_n = \left(\frac{S_n}{n}\right)^4 \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}_n = \left\{\omega \in \Omega, \exists k \geqslant n,\ U_k(\omega) \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right\}$$

a) Montrer que $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (on pourra raisonner par récurrence sur n)

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(U_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \dfrac{3}{n^{3/2}}$.

c) Montrer que $\mathscr{Z}_n \in \mathscr{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} P(\mathscr{Z}_n) = 0$.

d) En considérant $\mathscr{Z} = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \mathscr{Z}_n$, montrer que $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$ converge presque sûrement vers 0.