Correction du DM14

(extrait de Centrale MP 2016 maths 2)

Partie I

1. Si $s>0$, on pose $t=su$: la fonction $u\mapsto su$ est $\mathcal{C}^1$ strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^+$; on a $\mathrm{d}t=s\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(su)}{s^2u^2}s\,\mathrm{d}u=\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(su)}{u^2}\,\mathrm{d}u$.

Le résultat étant évident pour $s=0$ et par parité de la fonction $s\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(su)}{u^2}\,\mathrm{d}u$, on obtient bien $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(su)}{u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}|s| \text{ pour tout réel } s}$

2. a) La fonction $t\mapsto\dfrac{1-\cos^n t}{t^2}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\left|\dfrac{1-\cos^n t}{t^2}\right|\leqslant\dfrac{2}{t^2}$ donc $t\mapsto\dfrac{1-\cos^n t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et $\dfrac{1-\cos^n t}{t^2}\underset{t\to0}{=}\dfrac{1}{t^2}\left[1-\left(1-\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)\right)^n\right]=\dfrac{1}{t^2}\left[1-\left(1-\dfrac{nt^2}{2}+o(t^2)\right)\right]\xrightarrow[t\to0]{}\dfrac{n}{2}$ donc, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\boxed{t\mapsto\dfrac{1-\cos^n t}{t^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*}}$

On a $u_{2n+2}-u_{2n}=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos^{2n}t(1-\cos^2 t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\geqslant0$ donc $\boxed{(u_{2n})_{n\geqslant1} \text{ est croissante}}$

b) $u_1=\dfrac{\pi}{2}$ est donné par le texte.

On a $\cos^2(t)=\dfrac{1+\cos(2t)}{2}$ donc $u_2=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(2t)}{2t^2}\,\mathrm{d}t$. On pose alors $u=2t$: $u\mapsto\dfrac{u}{2}$ est $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ et on a $u_2=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(u)}{u^2/2}\frac{\mathrm{d}u}{2}$ donc $\boxed{u_2=\dfrac{\pi}{2}}$

c) On pose $t=\sqrt{2u/n}$: la fonction $u\mapsto\sqrt{2u/n}$ est $\mathcal{C}^1$ strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\sqrt{2nu}}\,\mathrm{d}u$ et $u_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\left(\cos\sqrt{2u/n}\right)^n}{2u/n}\times\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2nu}}$ donc $\boxed{u_n=\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}v_n}$

d) On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\theta:u\mapsto\left(\cos\sqrt{2u/n}\right)^n$: θ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et $\theta'(u)=n\dfrac{1}{\sqrt{2nu}}\left(\sin\sqrt{2u/n}\right)\left(\cos\sqrt{2u/n}\right)^{n-1}$ donc $|\theta'(u)|\leqslant\dfrac{n}{\sqrt{2nu}}\sqrt{2u/n}=1$. On en déduit donc, si $u\in]0,1]$, $|\theta(u)-\theta(0)|\leqslant1\times|u-0|$ qui est l'inégalité souhaitée.

e) On applique le théorème de convergence dominée avec $f_n(u)=\dfrac{1-\left(\cos\sqrt{2u/n}\right)^n}{u\sqrt{u}}$:

H1 : Si $u>0$, on a $\left(\cos\sqrt{2u/n}\right)^n\underset{n\to+\infty}{=}\exp\left[n\ln\left(1-\dfrac{u}{n}+o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)\right]=\exp\left[n\left(-\dfrac{u}{n}+o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)\right]$ donc

(f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers $u\mapsto\dfrac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}$.

H2 : les fonctions f_n et la fonction $u\mapsto\dfrac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}$ sont $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

H3 : On a, d'après la question précédente, $|f_n(u)|\leqslant\varphi(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{u}} & \text{si } u\in]0,1]\\ \dfrac{2}{u\sqrt{u}} & \text{si } u>1\end{cases}$ La fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=l}$

f) On fait une intégration par parties : $u\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ et $u\mapsto1-e^{-u}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{1-e^{-u}}{\sqrt{u}}\underset{u\to0}{\sim}\sqrt{u}\xrightarrow[u\to0]{}0$ et $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1-e^{-u}}{\sqrt{u}}=0$ donc $l=\left[-2\dfrac{1-e^{-u}}{\sqrt{u}}\right]_0^{+\infty}+2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}$, ce qui donne $\boxed{u_n\sim\sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}}$

Partie II

1. a) On a $E(X_k)=(-1)P(X_k=-1)+1P(X_k=1)=0$ et par linéarité $E(S_n)=\displaystyle\sum_{k=1}^n E(X_k)$ donc $\boxed{E(S_n)=0}$

Les X_k étant indépendantes, donc 2 à 2 indépendantes, on a $V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$. De plus, comme $X_k^2 = 1$ presque surement, on a $V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = 1$ puis $\boxed{V(S_n) = n}$

b) On a $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S)\cos(T)) - E(\sin(S)\sin(T))$; comme S et T sont indépendantes, $\cos(S)$ et $\cos(T)$ (resp. $\sin(S)$ et $\sin(T)$) sont indépendantes. On en déduit $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T)) - E(\sin(S))E(\sin(T))$. Comme T et $-T$ on la même loi, on a $E(\sin(T)) = E(\sin(-T)) = -E(\sin(T))$ donc $E(\sin(T)) = 0$, ce qui donne $\boxed{E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))}$

c) Les variables aléatoires discrètes S_{n-1} et X_n sont indépendantes (lemme des coalitions), X_n et $-X_n$ ont la même loi donc, avec la question précédente, $\varphi_n(t) = \varphi_{n-1}(t)E(\cos(X_n t))$.
Par le théorème de transfert, on a $E(\cos(X_n t)) = \cos(-t)P(X_n = -1) + \cos(t)P(X_n = 1) = \cos(t)$. Puis, par récurrence sur n, on trouve $\boxed{\varphi_n(t) = (\cos t)^n}$

d) On a $S_n(\Omega) \subset [\![-n, n]\!]$, le théorème de transfert donne alors $E(|S_n|) = \sum_{k=-n}^{n} |k| P(S_n = k)$ puis avec **I.1**, $E(|S_n|) = \dfrac{2}{\pi} \sum_{k=-n}^{n} \int_0^{+\infty} \dfrac{(1-\cos(kt))P(S_n = k)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \dfrac{(1-\cos(kt))P(S_n = k)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. On a ensuite $\sum_{k=-n}^{n} P(S_n = k) = 1$ et $\sum_{k=-n}^{n} \cos(kt)P(S_n = k) = E(\cos(S_n t)) = \varphi_n(t)$ par le théorème de transfert à nouveau.
On déduit de tout ceci $\boxed{E(|S_n|) = \dfrac{2}{\pi} u_n}$

2. a) On a $S_n^4 = S_{n-1}^4 + 4S_{n-1}^3 X_n + 6S_{n-1}^2 X_n^2 + 4S_{n-1}X_n^3 + X_n^4$. Comme $X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$, on a $X_n^2 = 1$, $X_n^3 = X_n$ et $X_n^4 = 1$. De plus, par indépendance de S_{n-1} et X_n, S_{n-1}^k et X_n^h sont indépendantes, donc $E(S_n^4) = E(S_{n-1}^4) + 4E(S_{n-1}^3)E(X_n) + 6E(S_{n-1}^2)E(1) + 4E(S_{n-1})E(X_n) + E(1)$. Enfin, comme $E(X_n) = 0$, il reste $E(S_n^4) = E(S_{n-1}^4) + 6E(S_{n-1}^2) + 1$. On calcule alors $E(S_{n-1}^2) = V(S_{n-1}) + E(S_{n-1})^2 = n - 1$, ce qui donne $E(S_n^4) = E(S_{n-1}^4) + 6n - 5$ puis par récurrence sur n $\boxed{E(S_n^4) = 3n^2 - 2n}$ car $E(S_1^4) = E(X_1^4) = 1$.

b) On applique l'inégalité de Markov à U_n, qui est positive : on a $P\left(U_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \dfrac{E(U_n)}{1/\sqrt{n}} = \dfrac{E(S_n^4)}{n^3\sqrt{n}}$ et comme $E(S_n^4) \leqslant 3n^2$, on a bien $\boxed{P\left(U_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \dfrac{3}{n^{3/2}}}$

c) On a $\mathcal{Z}_n = \bigcup_{k \geqslant n} \left(U_k \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ est une réunion dénombrable d'événements donc est un événement.
$0 \leqslant P\left(U_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \dfrac{3}{n^{3/2}}$ donc $\sum_{k \geqslant 1} P\left(U_k \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ converge et $P(\mathcal{Z}_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(U_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{3}{k^{3/2}}$; on en déduit $\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0}$

d) $\mathcal{Z}$ est une intersection dénombrable d'événements donc est aussi un événement. Comme les $\mathcal{Z}_n$ constituent une suite décroissante pour l'inclusion, par continuité décroissante, on a $P(\mathcal{Z}) = \lim_{n \to +\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$ donc $\mathcal{Z}$ est un événement négligeable.
D'autre part, si $\omega \notin \mathcal{Z}$ alors il existe n tel que $\omega \notin \mathcal{Z}_n$, ie $\omega \in \overline{\mathcal{Z}_n} = \bigcap_{k \geqslant n} \left(U_k < \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$; on a donc $U_k(\omega) < \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ pour tout $k \geqslant n$, ce qui donne $\lim_{n \to +\infty} U_n(\omega) = 0$ (car $U_n \geqslant 0$). Enfin, comme $U_n = \left(\dfrac{S_n}{n}\right)^4$, on en déduit $\boxed{\dfrac{S_n}{n} \text{ converge vers 0 presque surement}}$