(extrait de CCP PSI 2009 maths 2)

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Étant donnés deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$, on note $(u|v)$ leur produit scalaire et $\|u\|$ la norme du vecteur u.
On note $S = \{u \in \mathbb{R}^n / \ \|u\| = 1\}$. Pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres, réelles ou complexes, de f, c'est à dire le spectre de f.

1. Pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, on note $|||f||| = \sup\limits_{\|u\| \leqslant 1} \|f(u)\|$ la norme subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ de l'endomorphisme f.

a) Justifier que $f \mapsto |||f|||$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E), |||f \circ g||| \leqslant |||f||| \times |||g|||$$

b) Soit φ un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. Calculer $|||\varphi|||$.

c) Soit δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Montrer que $|||\delta||| = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |\alpha_i|$.

d) En déduire que lorsque f est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^n$ on a $|||f||| = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} |\lambda|$.

Dans la suite du problème, on note ℓ un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

2. Propriété de la plus grande valeur propre de ℓ. On note Φ l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \Phi(u) = (\ell(u)|u).$$

a) Montrer que Φ est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. En déduire que la restriction de l'application Φ à l'ensemble S admet un maximum.

On note v un vecteur de S tel que $\Phi(v) = \max\limits_{u \in S} \Phi(u)$. Dans la suite de la question 2, le vecteur v est fixé.

b) Soit u un vecteur de S orthogonal à v et soit t un réel.
Déterminer un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $w = \dfrac{v + tu}{\alpha}$ appartienne à S.
En comparant $\Phi(v)$ et $\Phi(w)$, montrer que $(\ell(v)|u) = 0$.
En déduire que le vecteur v est un vecteur propre pour ℓ.
On note ρ la valeur propre de ℓ associée au vecteur propre v.

c) Soit λ une valeur propre quelconque de ℓ et soit x un vecteur de S qui est un vecteur propre de ℓ pour la valeur propre λ.
Comparer $\Phi(x)$ et λ.
Déduire des résultats précédents que $\lambda \leqslant \rho$.

On a donc montré que $\rho = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(l)} = \max\limits_{u \in S} \Phi(u)$. et que si un vecteur v de S vérifie $\Phi(v) = \max\limits_{u \in S} \Phi(u)$, alors $\ell(v) = \rho v$.
Dans la suite du problème, on suppose que la matrice A de l'endomorphisme autoadjoint ℓ, relativement à la base orthonormale $\mathcal{B}$, vérifie les deux conditions suivantes :
(1) pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, on a $a_{i,j} \geqslant 0$;
(2) il n'existe pas de partition de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ vérifiant $[\![1, n]\!] = I \cup J$, $I \cap J = \emptyset$ avec I et J non vides et telle que pour tout $(i, j) \in I \times J$ on ait $a_{i,j} = 0$.
Étant donné un vecteur $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, on écrit $x \geqslant 0$ (respectivement $x > 0$) si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $x_i \geqslant 0$ (respectivement $x_i > 0$). On note x^+ le vecteur $x^+ = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| e_i$.

Dans la suite du problème, on note $\rho = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\ell)} \lambda$.

3. Signe de ρ.

a) Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Exprimer $\Phi(x)$ en fonction des scalaires $a_{i,j}$ et x_i. En déduire l'inégalité $|\Phi(x)| \leq \Phi(x^+)$.

b) Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vecteur de S tel que $\rho = \Phi(x)$. Montrer que $\rho = \Phi(x^+)$. En déduire que $\rho \geqslant 0$.

4. Soit λ une valeur propre quelconque de ℓ et soit x un vecteur de S tel que $\ell(x) = \lambda x$. Montrer que $|\lambda| \leqslant \rho$.
On a donc $\rho = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\ell)} |\lambda|$.

5. Soit x un vecteur de S tel que $\ell(x) = \rho x$. Montrer que $\ell(x^+) = \rho x^+$, puis montrer que $x^+ > 0$ (pour montrer que $x^+ > 0$, on pourra raisonner par l'absurde et se souvenir que la matrice A de l'endomorphisme ℓ vérifie la condition (2)).

6. Soient $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux vecteurs non nuls tels que $\ell(x) = \rho x$ et $\ell(y) = \rho y$.
Justifier que $y_1 \neq 0$.
En considérant le vecteur $z = x - \dfrac{x_1}{y_1} y$, montrer que le sous-espace propre de ℓ associé à la valeur propre ρ est de dimension 1.

7. Soit x un vecteur propre de ℓ associé à une valeur propre λ. On suppose $x > 0$.
Montrer que $\lambda \geqslant 0$.
Montrer que $\lambda = \rho$.

8. On suppose $n \geqslant 3$. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice telle que :
(1) $a_{1,n} = a_{n,1} = 1$;
(2) pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$ tel que $|i - j| = 1$, $a_{i,j} = 1$;
(3) dans tous les autres cas $a_{i,j} = 0$.

Déduire des question précédentes la plus grande valeur propre de la matrice A.