Correction du DM15

(extrait de CCP PSI 2009 maths 2)

---

1. a) Fait en cours

b) Si $\varphi \in \mathcal{O}(E)$ alors $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$ donc $\boxed{|||\varphi||| = 1}$

c) Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a $\delta(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i e_1$ donc, comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, on a $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ et $\|\delta(x)\| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 x_i^2$. On a donc $\|\delta(x)\|^2 \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \alpha_i^2 \|x\|^2$ puis $\|\delta(x)\| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\alpha_i| \times \|x\|$. Comme on a égalité avec le vecteur e_{i_0} pour lequel $\alpha_{i_0} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\alpha_i|$ et $\|e_{i_0}\| = 1$, on a $\boxed{|||\delta||| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\alpha_i|}$

d) f est autoadjoint donc il existe un endomorphisme orthogonal φ tel que $f = \varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1}$ où $\mathrm{Sp}(f) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. On a alors $\|f(x)\| = \|\delta(y)\|$ avec $y = \varphi^{-1}(y)$ et $\|y\| = \|x\|$ (ie $x \mapsto \varphi^{-1}$ est une bijection de $B(0,1)$ sur elle-même) donc $|||f||| = |||\delta|||$ et $\boxed{|||f||| = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} |\lambda|}$

2. a) $(x, y) \mapsto (\ell(x)|y)$ est bilinéaire donc continue car E est de dimension finie donc $\boxed{\Phi \text{ est continue}}$

S est une partie fermée bornée et non vide de E donc $\boxed{\max_S \Phi \text{ existe}}$

b) Il suffit de prendre $\boxed{\alpha = \|v + tu\|}$

Pour une telle valeur de α, on a, par définition de v, $\Phi(w) \leqslant \Phi(v)$. De plus, par bilinéarité du produit scalaire et l autoadjoint, on a $\Phi(v) = \dfrac{1}{\alpha^2}(\Phi(v) + 2t(l(v)|u) + t^2\Phi(u))$ et, comme $u \perp v$, $\alpha^2 = \|v + tu\|^2 \overset{\text{Pythogore}}{=} \|v^2\| + t^2\|u\|^2 = 1 + t^2$. On a donc, pour tout réel t, $2t(\ell(v)|u) + t^2(\Phi(u) - \Phi(v)) \leqslant 0$ ce qui impose $\boxed{(\ell(v)|u) = 0}$ (sinon le polynôme précédent, de degré $\leqslant 2$ changerait de signe sur $\mathbb{R}$).

Si $u \in \mathrm{Vect}\{v\}^\perp \setminus \{0\}$, alors on a $\ell(v) \perp \dfrac{u}{\|u\|}$ donc $\ell(v) \perp u$; on a donc $\ell(v) \in \left(\mathrm{Vect}\{v\}^\perp\right)^\perp = \mathrm{Vect}\{v\}$ ce qui signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\ell(v) = \lambda v$ et, comme $v \neq 0$, $\boxed{v \text{ est un vecteur propre de } \ell}$

c) Comme $x \in S$, on a $\Phi(x) \leqslant \Phi(v)$ puis comme $\ell(x) = \lambda x$ et $\ell(v) = \rho v$, on a $\Phi(x) = \lambda$ et $\Phi(v) = \rho$ donc $\boxed{\lambda \leqslant \rho}$

3. a) On a $\ell(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \ell(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right) e_i$ (on peut permuter ces deux sommes car elles sont finies).

Puis, comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, on obtient $\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right) x_i = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$. On en déduit $|\Phi(x)| \overset{a_{i,j}\geqslant 0}{\leqslant} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} |x_i||x_j| = \Phi(x^+)$.

b) Si $\Phi(x) = \rho$ et $x \in S$, on a $|\rho| = |\Phi(x)| \leqslant \Phi(x^+)$ donc $\rho \leqslant \Phi(x^+)$; de plus $\|x\| = \|x^+\|$ donc $x^+ \in S$ et par définition de $\rho = \max_S \Phi$, on a $\boxed{\rho = \Phi(x^+)}$

On a ensuite $\rho = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} |x_i||x_j|$ et $a_{i,j} \geqslant 0$ donc $\boxed{\rho \geqslant 0}$

Ceci était en fait évident puisque ℓ étant diagonalisable, on a $\mathrm{Tr}(\ell) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\ell)} \lambda = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \geqslant 0$ donc il existe au moins une valeur propre de ℓ positive ; la plus grande ρ est donc nécessairement positive.

4. Si $\ell(x) = \lambda x$ alors $|\lambda| = |\Phi(x)| \leqslant \Phi(x^+) \leqslant \rho$ car $x^+ \in S$.

5. Si $\ell(x) = \rho x$ alors, comme à la question précédente, on obtient $\rho = |\rho| = |\Phi(x)| \leqslant \Phi(x^+) \leqslant \rho$ donc $\Phi(x^+) = \rho$ et $x^+ \in S$. D'après la conclusion de **2** (rappelée dans le texte), on en déduit $\boxed{\ell(x^+) = \rho x^+}$

L'égalité $\ell(x^+) = \rho x^+$ donne, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_j| = \rho |x_i|$. Si on suppose que $x^+ > 0$ est faux alors on pose $I = \{i \in [\![1, n]\!]\,, x_i = 0\}$ et $J = \{i \in [\![1, n]\!]\,, x_i \neq 0\}$; on a $I \cup J = [\![1, n]\!]$, $I \neq \emptyset$ et $J \neq \emptyset$ car $x \in S$ est forcément non nul (donc possède au moins une coordonnée non nulle). On a donc, pour $i \in I$, $0 = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_j| = \sum_{j\in J} a_{i,j} |x_j|$; cette somme de nombre positif étant nulle, on a $\forall j \in J, a_{i,j} |x_j| = 0$ et $x_j \neq 0$ pour $j \in J$. On a donc $a_{i,j} = 0$ si $i \in I$ et $j \in J$, ce qui est contradictoire avec (2). On a donc $\boxed{x^+ > 0}$

On vient en fait de prouver que pour tout vecteur propre x de ℓ associé à ρ, on a $x^+ > 0$ donc toutes les coordonnées de x sont non nulles.

6. $y_1 \neq 0$ comme expliqué juste au dessus. On vérifie $\ell(z) = \rho z$ et la première coordonnée de z est nulle donc $z = 0$ d'après la remarque au dessus. On en déduit donc que x et y sont liés, pour tout couple (x, y) de $E_\rho(l)$, ce qui donne $\boxed{\dim(E_\rho(\ell)) = 1}$

7. On a $\lambda x_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j \geqslant 0$ et $x_1 > 0$ donc $\lambda \geqslant 0$. Comme ℓ est un endomorphisme autoadjoint, ses espaces propres sont orthogonaux ; si $\lambda \neq \rho$ et si $y > 0$ est un vecteur propre associé à ρ (qui existe d'après **5**), $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$ avec $x > 0$ et $y > 0$ ce qui est impossible. On a donc $\boxed{\lambda = \rho}$

On vient cette fois de prouver que ρ est la seule valeur propre de ℓ associée à un vecteur propre dont toutes les coordonnées sont strictement positives.

8. On commence par vérifier que A vérifie (1) et (2) (car $\forall i \in [\![1, n]\!], \exists j \in [\![1, n]\!], a_{i,j} \neq 0$). On vérifie que le vecteur $X = (1, \ldots, 1)^T$ vérifie $AX = 2X$ donc X est un vecteur propre de A dont toutes les coordonnées sont strictement positives ; on en déduit que X est associé à la valeur propre ρ donc $\boxed{\max \operatorname{Sp}(A) = 2}$