(inspiré de Centrale MP 2018 maths 2)

Notations

— n désigne un entier $\geqslant 2$.

— On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\|.\|$ désigne la norme euclidienne.

— Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$, on désigne par $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon R pour la distance euclidienne. Autrement dit

$$B(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^n / \ \|x - a\| < R\}$$

La boule fermée de centre a et de rayon R est alors $\overline{B(a, R)}$ (c'est l'adhérence de la boule ouverte).

— L'opérateur différentiel Δ (appelé laplacien) est défini pour toute fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ par

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in U, \ \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

— Une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs réelles sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dite harmonique sur U si

$$\forall x \in U, \ \Delta f(x) = 0$$

L'ensemble des fonctions harmoniques est noté $\mathcal{H}(U)$.

I Fonctions harmoniques : quelques propriétés

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{H}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$.

2. On suppose dans cette question que U est convexe. Déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{H}(U)$ telles que f^2 appartienne aussi à $\mathcal{H}(U)$.

3. Donner une fonction non constante appartenant à $\mathcal{H}(U)$. Le produit de deux fonctions harmoniques est-il une fonction harmonique ?

II Exemples de fonctions harmoniques

II.A - On cherche dans cette question à déterminer les fonctions harmoniques non nulles sur $\mathbb{R}^2$ à variables séparables, c'est à dire les fonctions f s'écrivant sous la forme $f(x, y) = u(x)v(y)$.
On se donne donc deux fonctions u et v, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulles, et on pose

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x, y) = u(x)v(y)$$

On suppose que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer qu'il existe une constante λ réelle telle que u et v soient solutions respectives des équations

$$z'' + \lambda z = 0 \ \text{ et } \ z'' - \lambda z = 0$$

2. Donner en fonction du signe de λ la forme des fonctions harmoniques à variables séparables.

II.B - Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On pose, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$,

$$g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

On admet que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ si et seulement si, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$,

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$$

1. Déterminer les fonctions harmoniques radiales de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, c'est à dire les fonctions f appartenant à $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ telles que $(r, \theta) \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ soit indépendante de θ.

2. Soient a, b, r_1, r_2 quatre réels tels que $0 < r_1 < r_2$. Déterminer une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ telle que

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \\ f(x, y) = a \ \text{ si } \ \|(x, y)\| = r_1 \\ f(x, y) = b \ \text{ si } \ \|(x, y)\| = r_2 \end{cases}$$

II.C - Dans cette sous-partie II.C, on considère deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, $u\ :\ \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ et $v\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on pose

$$\forall (r,\theta) \in\ \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \qquad f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = u(r)v(\theta)$$

La fonction f est alors une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dite à variables polaires séparables.

1. Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors v est 2π-périodique.

2. Montrer que, si f est harmonique et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors il existe un réel λ tel que u soit solution de l'équation différentielle (II.1)

$$r^2 z''(r) + rz'(r) - \lambda z(r) = 0 \tag{II.1}$$

et v soit solution de l'équation différentielle (II.2)

$$z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0 \tag{II.2}$$

3. On suppose ici que $\lambda = 0$.

a) Quelles sont les solutions 2π-périodiques de (II.2) ?

b) Résoudre (II.1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) En déduire, dans le cas $\lambda = 0$, les fonctions harmoniques à variables polaires séparables.

4. On suppose désormais $\lambda \neq 0$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (II.2) admette des solutions 2π-périodiques non nulles. Donner ces solutions.

b) Résoudre (II.1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
On pourra considérer, en justifiant son existence, une fonction Z de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $r > 0$, $z(r) = Z(\ln(r))$.

c) Quelles sont les solutions se prolongeant par continuité en 0 ?

III Principe du maximum faible

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant, connu sous le nom de principe du maximum faible.

> Si f est une fonction continue sur $\overline{B(a,R)}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur $B(a,R)$, alors
> $$\forall x \in B(a,R), \qquad f(x) \leqslant \sup_{y \in S(a,R)} f(y)$$
> où $S(a,R)$ la sphère de centre a et de rayon R.

III.A - Soit f une fonction continue sur $\overline{B(a,R)}$.

1. Montrer que f admet un maximum en un point $x_0 \in \overline{B(a,R)}$.

On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que, pour tout $x \in B(a,R)$, $\Delta f(x) > 0$.

2. Montrer que $x_0 \in S(a,R)$ et en déduire que $\forall x \in B(a,R),\ f(x) < \sup_{y \in S(a,R)} f(y)$.

On pourra supposer par l'absurde que $x_0 \in B(a,R)$, justifier qu'il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$, et considérer la fonction φ définie, pour tout t réel, par $\varphi(t) = f(x_0 + te_i)$, où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

III.B - Soit f une fonction continue sur $\overline{B(a,R)}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur $B(a,R)$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \|x\|^2$.

1. Montrer que g_ε est continue sur $\overline{B(a,R)}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $B(a,R)$, et telle que $\forall x \in B(a,R),\ \Delta g_\varepsilon(x) > 0$.

2. En déduire que $\forall x \in B(a,R),\ f(x) \leqslant \sup_{y \in S(a,R)} f(y)$.

3. Soient f_1, f_2 deux fonctions continues sur $\overline{B(a,R)}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmoniques sur $B(a,R)$. Montrer que si les fonctions f_1 et f_2 sont égales sur $S(a,R)$, alors f_1 et f_2 sont égales sur $B(a,R)$.