Correction du DM16

(extrait de Centrale MP 2018 maths 2)

Partie I

1. On vérifie, par linéarité des dérivées partielles que Δ est une application linéaire de $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ vers $\mathcal{C}^0(U,\mathbb{R})$ donc $\boxed{\mathcal{H}(U)=\ker(\Delta) \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})}$

2. On a $\dfrac{\partial(f^2)}{\partial x_i}=2f\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ puis $\dfrac{\partial^2(f^2)}{\partial {x_i}^2}=2\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2+2f\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}$ donc $\Delta(f^2)=2\displaystyle\sum_{i=1}^n\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2+2f\Delta(f)$ donc si f et f^2 sont harmoniques, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^n\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2=0$ donc $\forall i\in[\![1,n]\!]$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=0$ et comme U est convexe, f est constante sur U.

La réciproque est évidente : si f est constante sur U alors f et f^2 sont harmoniques.

3. $f(x_1,\dots,x_n)=\displaystyle\prod_{i=1}^n x_i$ est harmonique puisque $\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}=0$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

$\mathcal{H}(U)$ n'est pas stable par produit car $f(x)=x_1$ est harmonique mais $f^2(x)=x_1^2$ ne l'est pas ($\Delta(f^2)=2$)

Partie II.A

1. $\Delta(f)(x,y)=u''(x)v(y)+u(x)v''(y)$ et $\Delta(f)(x,y)=0$ pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a supposé $v\neq 0$ donc il existe $y_0\in\mathbb{R}$ tel que $v(y_0)\neq 0$. On a donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $u''(x)v(y_0)+u(x)v''(y_0)=0$ dont $\boxed{u''(x)+\lambda u(x)=0}$ avec $\lambda=\dfrac{v''(y_0)}{v(y_0)}$.

On a alors $\Delta(f)(x,y)=u(x)(-\lambda v(y)+v''(y))=0$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et comme il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que $u(x)\neq 0$, on en déduit $\boxed{v''(y)-\lambda v(y)=0}$

2. Si $\lambda>0$, on a $u(x)=\alpha\cos(\sqrt{\lambda}x)+\beta\sin(\sqrt{\lambda}x)$ et $v(y)=\gamma\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}x)+\delta\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}y)$ donc $f(x,y)=(\alpha\cos(\sqrt{\lambda}x)+\beta\sin(\sqrt{\lambda}x))(\gamma\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}y)+\delta\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}y))$ pour laquelle on vérifie facilement que f est harmonique.

Si $\lambda<0$, on trouve de même $f(x,y)=(\alpha\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}x)+\beta\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}x))(\gamma\cos(\sqrt{\lambda}y)+\delta\sin(\sqrt{\lambda}y))$

Si $\lambda=0$, on trouve $f(x,y)=(\alpha x+\beta)(\gamma y+\delta)$.

Partie II.B

1. On a alors $\dfrac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}=0$ et il reste, pour $r>0$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=0$ donc $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=\alpha e^{-\ln r}=\dfrac{\alpha}{r}$ puis $g(r,\theta)=-\alpha\ln(r)+\beta$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ (les constantes ne dépendent pas de θ puisque g est indépendante de θ). On peut alors revenir à $\boxed{f(x,y)=\lambda\ln(x^2+y^2)+\mu}$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, et on vérifie facilement que de telles fonctions sont bien harmoniques.

2. Il suffit de prendre $f(x,y)=\dfrac{(a-b)\ln(x^2+y^2)-2a\ln(r_1)+2b\ln(r_2)}{2(\ln(r_1)-\ln(r_2))}$

Partie II.C

1. Comme sin et cos sont 2π-périodiques, on a, pour tout $(r,\theta)\in\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$, $u(r)v(\theta)=u(r)v(\theta+2\pi)$ et comme $f\neq 0$, il existe $r_0>0$ tel que $u(r_0)\neq 0$. L'égalité, valable pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, $u(r_0)v(\theta)=u(r_0)v(\theta+2\pi)$ implique que $\boxed{v \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}$

2. En conservant les notations de **II.B**, on a $\Delta(g)(r,\theta)=0$ si et seulement si $r^2u''(r)v(\theta)+u(r)v''(\theta)+ru'(r)v(\theta)=0$ pour tout couple (r,θ). On choisit alors θ_0 tel que $v(\theta_0)\neq 0$, qui existe car $f\neq 0$ et on obtient l'équation (II.1), avec $\lambda=-\dfrac{v''(\theta_0)}{v(\theta_0)}$.

On a alors $0=u(r)v''(\theta)+(r^2u''(r)+ru'(r))v(\theta)\overset{\text{(II.1)}}{=}u(r)v''(\theta)+\lambda u(r)v(\theta)$ et en prenant r_0 tel que $u(r_0)\neq 0$, on obtient (II.2).

3. a) $z(\theta)=a\in\mathbb{R}$ sont les seules solutions périodiques de (II.2) si $\lambda=0$

b) On a $rz''(r)+z'(r)=0$ donc $z(r)=b\ln(r)+c$ avec $(b,c)\in\mathbb{R}^2$.

c) $g(r,\theta)=ab\ln(r)+ac$ donc $f(a,y)=a'\ln(x^2+y^2)+b'$ avec $(a',b')\in\mathbb{R}^2$.

4. a) Pour $\lambda<0$, les solutions de (II.2) sont $z(\theta)=ae^{\sqrt{-\lambda}\theta}+be^{\sqrt{-\lambda}\theta}$ donc seule la solution nulle est périodique.

Pour $\lambda>0$, les solutions de (II.2) sont $z(\theta)=a\cos(\sqrt{\lambda}\theta)+b\sin(\sqrt{\lambda}\theta)$ qui sont 2π-périodiques si et seulement si $2\pi\sqrt{\lambda}\in 2\pi\mathbb{Z}$ donc si et seulement si $\lambda=k^2$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Dans ce cas, les solutions sont $\boxed{z(\theta)=a\cos(k\theta)+b\sin(k\theta) \text{ avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2 \text{ si } \lambda=k^2 \text{ et } k\in\mathbb{Z}}$

b) Si $z(r) = Z(\ln(r))$ avec $Z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ alors, par composition $z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*})$ et inversement on aura $Z(X) = z(e^X)$ donc si $z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*})$, on aura $Z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

On a ensuite $z'(r) = \dfrac{1}{r}Z'(\ln(r))$ et $z''(r) = -\dfrac{1}{r^2}Z'(\ln(r)) + \dfrac{1}{r^2}Z''(\ln(r))$ donc $r^2z''(r) + rz'(r) - \lambda z(r) = Z''(\ln(r)) - \lambda Z(\ln(r))$ donc z est solution de (II.1) sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si Z est solution de $Z'' - \lambda Z = 0$ sur $\mathbb{R}$. On retrouve donc les mêmes solutions Z que celles données pour (II.2) (avec $-\lambda$ à la place de λ) et donc

$$\boxed{z(r) = \begin{cases} a\cos(\sqrt{-\lambda}\ln(r)) + b\sin(\sqrt{-\lambda}\ln(r)) & \text{si } \lambda < 0 \\ ae^{\sqrt{\lambda}\ln(r)} + be^{\sqrt{\lambda}\ln(r)} & \text{si } \lambda > 0 \end{cases}}$$

c) On a, pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $g(r,\theta) = [a\cos(k\theta) + b\sin(k\theta)] \times \left[ce^{k\ln(r)} + de^{k\ln(r)}\right]$ (car $\lambda = k^2 > 0$) donc $g(r,\theta) = [a\cos(k\theta) + b\sin(k\theta)] \times \left[cr^k + \dfrac{d}{r^k}\right]$ et on peut supposer $k > 0$ (sinon changer k par $-k$, ce qui ne fait que modifier le nom des constantes)

On a alors $f(x,y) = \dfrac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[c(x^2+y^2)^{k/2} + d(x^2+y^2)^{-k/2}\right]$.

Si $d \neq 0$ et $(a,b) \neq (0,0)$, alors $f(ax,bx) = \dfrac{x}{\sqrt{a^2+b^2}|x|}\left[c(a^2+b^2)^{k/2}|x|^{k/2} + d(a^2+b^2)^{-k/2}|x|^{-k/2}\right]$ qui n'a pas de limite finie en quand x tend vers 0.

Par contre, si $d = 0$, on a $|f(x,y)| \leqslant (|a| + |b|) \times |c| \times \|(x,y)\|_2^k \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ car $k > 0$.

Les solutions prolongeables par continuité en $(0,0)$ sont donc de la forme $\boxed{f(x,y) = \dfrac{a'x + b'y}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2)^{k/2}}$ avec $(a',b') \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Partie III.A

1. f est continue sur $\overline{B(a,R)}$, fermée bornée non vide en dimension finie, donc $\boxed{f \text{ admet un maximum sur } \overline{B(a,R)}}$

2. Si $\Delta(f)(x_0) > 0$ alors il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(x_0) > 0$. Si on suppose $x_0 \in B(a,R)$, qui est ouverte alors x_0 est un point critique de f donc $\nabla(f)(x_0) = 0$. Pour $h = te_i$, la formule de Taylor-Young donne alors $f(x_0 + te_i) - f(x_0) \underset{t\to 0}{=} \dfrac{t^2}{2}{e_i}^T H_f(x_0)e_i + o(t^2) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(x_0) > 0$ ce qui contredit le fait que f admette en x_0 un maximum local.

Partie III.B

1. On vérifie $\Delta(g_\varepsilon) = \Delta(f) + 2n\varepsilon = 2n\varepsilon > 0$; les propriétés de régularité se déduisent de celles de f car la fonction $x \mapsto \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\overline{B(a,R)}$.

2. On peut donc appliquer ce qui précède à g_ε : pour tout $x \in B(a,R)$, on a $g_\varepsilon(x) < \max\limits_{S(a,R)} g_\varepsilon = M_\varepsilon$. Si $x \in S(a,R)$, $g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon\|x\|^2 \leqslant \max\limits_{S(a,R)} f + \varepsilon\|x\|^2 \overset{\text{ineg triang}}{\leqslant} \max\limits_{S(a,R)} f + \varepsilon(\|a\| + R)^2$, donc $M_\varepsilon \leqslant \max\limits_{S(a,R)} f + \varepsilon(\|a\| + R)^2$. On a donc, pour tout $x \in B(a,R)$, $f(x) + \varepsilon\|x\|^2 \leqslant \max\limits_{S(a,R)} f + \varepsilon(\|a\| + R)^2$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient le résultat souhaité en faisant tendre ε vers 0.

3. On a $f_1 - f_2$ continue sur $\overline{B(a,R)}$, $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur $B(a,R)$ donc, pour $x \in B(a,R)$, on a, d'après **III.B.2**, $f_1(x) - f_2(x) \leqslant \max\limits_{S(a,R)}(f_1 - f_2) = 0$. En faisant de même avec $f_2 - f_1$, on en déduit $\boxed{f_1 = f_2 \text{ sur } B(a,R)}$