L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet comporte un problème et des exercices indépendants.
La propreté des copies, la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et des justifications données tiendra une part prépondérante dans la notation !

PROBLEME

On considère α un réel tel que $\alpha > 1$. Le but du problème est de justifier l'existence et de calculer la limite en $+\infty$ de la fonction I_α définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $I_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^\alpha}$.

Partie I : Résultats préliminaires

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les deux fonctions f_n et g_n sur $]0, \pi]$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

a) Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \cos(kx)\,\mathrm{d}x$, pour $k \geqslant 1$, et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que si $x \in]0, \pi]$ et $n \geqslant 1$, on a $f_n(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} g_n(x)$.

c) En déduire que g_n est prolongeable par continuité en 0. On notera encore g_n la fonction ainsi prolongée. Quelle est alors la valeur de $g_n(0)$?

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^\pi g_n(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \pi$.

2. On définit sur $[0, \pi]$ la fonction g par :

$$\forall x \in]0, \pi],\ g(x) = \frac{\cos\left(\dfrac{x}{\alpha}\right) - 1}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad g(0) = 0$$

a) Montrer que g est dérivable en 0 et préciser $g'(0)$.

b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$ et calculer g'.

c) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \displaystyle\int_0^\pi g(x) \sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|v_n| \leqslant \dfrac{A}{2n+1}$.

e) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = \displaystyle\int_0^\pi f_n(x) \cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $X_n = -\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right) + \dfrac{1}{2}v_n + \dfrac{1}{2}u_n$.

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} X_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$.

c) Pour $k \geqslant 1$, calculer $\displaystyle\int_0^\pi \cos(kx)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)\,\mathrm{d}x$.

d) En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $X_n = \dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[\frac{1}{1+k\alpha} + \frac{1}{1-k\alpha}\right]$.

Partie II : Calcul de $\lim\limits_{+\infty} I_\alpha$

On pose dans la suite du problème $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$, donc $0 < \beta < 1$.
On définit sur $]0,1]$ les fonctions φ et ψ par :

$$\forall t \in]0,1],\ \varphi(t) = \frac{t^{\beta-1}}{1+t} \quad \text{et} \quad \psi(t) = \frac{t^{-\beta}}{1+t}$$

Enfin, pour $x \in]0,1]$, on pose

$$J(x) = \int_x^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K(x) = \int_x^1 \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

1. a) Montrer que la fonction I_α est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) En remarquant que si $u \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{1+u^\alpha} \leqslant u^{-\alpha}$, montrer que $x \mapsto I_\alpha(x) - I_\alpha(1)$ est majorée sur $[1, +\infty[$.

c) En déduire que I_α admet une limite finie en $+\infty$.

2. a) Démontrer que si $x \in]0,1[$, on a $\displaystyle\int_x^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_{x^{1/\alpha}}^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^\alpha}$; on pourra poser $t = u^\alpha$.

b) En déduire que J est prolongeable par continuité en 0 et que $J(0) = \alpha I_\alpha(1)$ (en notant encore J la fonction prolongée).

3. a) Montrer que si $x \in]0,1[$, on a $K(x) = \alpha\left(I_\alpha\left(x^{-1/\alpha}\right) - I_\alpha(1)\right)$.

b) En déduire que K est prolongeable par continuité en 0 et que $K(0) = \alpha\left(\lim\limits_{+\infty} I_\alpha - I_\alpha(1)\right)$ (en notant encore K le prolongement).

4. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $\sigma_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k$. Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1]$, on pose $J_n(x) = \displaystyle\int_x^1 \sigma_n(t) \times t^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$ et $K_n(x) = \displaystyle\int_x^1 \sigma_{n-1}(t) \times t^{-\beta}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1]$, $\left|\sigma_n(t) - \dfrac{1}{1+t}\right| \leqslant t^{n+1}$.

b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1]$, on a $|J(x) - J_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1+\beta}$ et $|K(x) - K_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1-\beta}$.

c) Calculer $J_n(x) + K_n(x)$ et en déduire que $\lim\limits_{x \to 0} J_n(x) + K_n(x) = \alpha + \dfrac{2X_n}{\sin\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)}$ (on pourra utiliser **I.3.d**).

d) Justifier l'existence de la limite quand x tend vers $+\infty$ de $I_\alpha(x)$ et déterminer la valeur de cette limite.

Fin du Problème

EXERCICES

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{10^{2k}}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{10^{2n+1}}$.

a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes (sans calculer explicitement u_n).

b) En déduire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers un réel ℓ.

c) Par ailleurs, trouver une expression compacte de u_n en fonction de n puis déterminer la valeur de ℓ.

3. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \arctan(\mathrm{sh}(x)) - \arccos\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)$.

a) Justifier que f est dérivable, calculer f'.

b) Qu'en déduire sur f ?

4. Trouver l'expression générale (la plus simple possible, c'est-à-dire sans logarithme) des solutions sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle du premier ordre suivante $(E)\ :\ y' - y\tan(x) = 1$.

5. Soit $P = X^6 - 3X^5 + 4X^4 - 3X^3 + 2X - 1$.

a) Calculer l'ordre de multiplicité m de la racine 1 de P.

b) Trouver Q tel que $P = (X-1)^m Q$.

c) Calculer la somme des racines de Q et la somme des inverses de ses racines.

6. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $f : E \to E$ définie par : $\forall (x,y,z) \in E,\ f(x,y,z) = (x+y, -x-y, 0)$.

a) Établir que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

b) Déterminer une équation de son noyau et deux vecteurs v_1 et v_2 tels que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

c) Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est une droite et trouver un vecteur simple qui l'engendre.

7. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) En décomposant $A = B + E_{2,2}$, calculer la matrice A^n en fonction de B et $E_{2,2}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Vous donnerez alors les 9 coefficients de A^n en fonction de n.

b) Calculer $A \times C$ où $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Qu'en déduire quant à l'inversibilité de la matrice A ?

8. Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la matrice $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2. Que peut-on donc dire de f ?

b) Trouver deux vecteurs non colinéaires v_1 et v_2 tels que $f(v_1) = v_1$ et $f(v_2) = v_2$.

c) Trouver un autre vecteur v_3 tel que $f(v_3) = 0$.

d) Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.

e) Quelle est la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$?

9. Soient $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.

a) Donner l'expression de $u(x, y, z)$ pour un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

b) Déterminer deux vecteurs w_1 et w_2 tels que $\ker(u - id) = \text{Vect}\{w_1\}$ et $\ker(u + id) = \text{Vect}\{w_2\}$ (id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$).

c) Déterminer un vecteur w_3 tel que $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u soit $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) Donner P, la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$, ainsi que la relation liant les matrices M, M' et P.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $D_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & \dots & 0 & b & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b & a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & b & 0 & \dots & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ (la matrice dont on calcule le déterminant appartient à $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$).

a) Déterminer, pour $n \geq 1$, une relation simple entre D_{2n+2} et D_{2n} en développant deux fois.

b) En déduire la valeur de D_{2n} en fonction de n.

Fin du sujet