Correction du DS1

PROBLEME (inspiré de Mines Sup 2003) : Partie I

1. a) Comme $k \neq 0$, $\displaystyle\int_0^\pi \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^\pi = 0$ et, par linéarité de l'intégrale, $\boxed{\displaystyle\int_0^\pi f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0}$

b) On a $f_n(x) = \mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n e^{ikx}\right)$ et comme $e^{ix} \neq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{-2i\sin\frac{nx}{2}}{-2i\sin\frac{x}{2}}$ d'où on déduit $f_n(x) = \dfrac{\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right) - \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right] = \boxed{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}g_n(x)}$

Le résultat étant donné, on pouvait aussi le prouver par récurrence sur n.

c) On a $\lim\limits_0 g_n = \lim\limits_0(1+2f_n) = 2n+1$ donc on prolonge par continuité g_n par $\boxed{g_n(0) = \lim\limits_{x\to 0} g_n(x) = 2n+1}$

On peut aussi déterminer cette limite à partir de l'expression de g_n et en utilisant $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

d) On a, pour $n \geqslant 1$, $g_n = 1 + 2f_n$ donc $u_n = \pi + 2\displaystyle\int_0^\pi f_n(t)\,\mathrm{d}t = \pi$ (avec **I.1.a**) ; comme $u_0 = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{d}t = \pi$, on a $\boxed{u_n = \pi \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$

2. a) On a, pour $x \neq 0$, $g(x) \underset{0}{=} \dfrac{1 - \frac{x^2}{2\alpha^2} - 1 + o(x^2)}{\frac{x}{2} + o(x^2)} = -\dfrac{\frac{x}{\alpha^2} + o(x)}{1+o(x)} = -\dfrac{x}{\alpha^2} + o(x)$. Comme $g(0) = 0$, on peut aussi écrire $g(x) \underset{x\to 0}{=} g(0) - \dfrac{x}{\alpha^2} + o(x)$ et ce $\mathrm{DL}_1(0)$ prouve que g est dérivable en 0 et $\boxed{g'(0) = \dfrac{-1}{\alpha^2}}$

b) Comme $\sin\dfrac{x}{2} \neq 0$ si $x \in]0,\pi]$, g est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et $g'(x) = \dfrac{-\sin\frac{x}{\alpha}}{\alpha\sin\frac{x}{2}} + \left(\cos\dfrac{x}{\alpha} - 1\right)\dfrac{-\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$

c) Comme $\cos\dfrac{x}{\alpha} - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2\alpha^2}$, on obtient $\lim\limits_0 g' = -\dfrac{2}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha^2} = g'(0)$ donc $\boxed{g \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\pi]}$

d) Les fonctions g et cos sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ donc $v_n = \left[g(x)\dfrac{-\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{\frac{2n+1}{2}}\right]_0^\pi + \displaystyle\int_0^\pi g'(x)\frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{\frac{2n+1}{2}}\,\mathrm{d}x$, donc $|v_n| = \dfrac{2}{2n+1}\left|\displaystyle\int_0^\pi g'(x)\cos(2n+1)\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \boxed{\dfrac{2}{2n+1}\displaystyle\int_0^\pi |g'(x)|\,\mathrm{d}x}$ par inégalité triangulaire sur les intégrales.

e) On en déduit, par encadrement, $\boxed{\lim v_n = 0}$ puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1} = 0$.

3. a) Avec **I.1.b**, par linéarité de l'intégrale, on a $X_n = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi \cos\frac{x}{\alpha}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\pi g_n(x)\cos\frac{x}{\alpha}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\pi}{\alpha} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{\alpha} - 1 + 1\right)\mathrm{d}x$ donc $\boxed{X_n = -\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\pi}{\alpha} + \dfrac{1}{2}(v_n + u_n)}$

b) Comme $\lim u_n = \pi$ et $\lim v_n = 0$, on a $\boxed{\lim X_n = -\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\pi}{\alpha} + \dfrac{\pi}{2}}$

c) On a $\displaystyle\int_0^\pi \cos(kx)\cos\frac{x}{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi\left[\cos\left(k+\frac{1}{\alpha}\right)x + \cos\left(k-\frac{1}{\alpha}\right)x\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\dfrac{\sin\left(k+\frac{1}{\alpha}\right)x}{k+\frac{1}{\alpha}} + \dfrac{\sin\left(k-\frac{1}{\alpha}\right)x}{k-\frac{1}{\alpha}}\right]_0^\pi$, car $k \pm \dfrac{1}{\alpha} \neq 0$, donc $\displaystyle\int_0^\pi \cos(kx)\cos\frac{x}{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{\alpha}}{k+\frac{1}{\alpha}} - \dfrac{\sin\frac{\pi}{\alpha}}{k-\frac{1}{\alpha}}\right) = \boxed{\dfrac{(-1)^k\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}{2}\left(\dfrac{1}{1+k\alpha} + \dfrac{1}{1-k\alpha}\right)}$

d) Avec l'expression de f_n, par linéarité de l'intégrale, on a $\boxed{X_n = \dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\pi}{\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^n(-1)^k\left(\dfrac{1}{1+k\alpha} + \dfrac{1}{1-k\alpha}\right)}$

Partie II

1. a) Comme $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, I_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $I'_\alpha(x) = \dfrac{1}{1+x^\alpha} > 0$ donc on en déduit $\boxed{I_\alpha \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+}$

b) Si $u > 0$, on a $1 + u^\alpha \geqslant u^\alpha > 0$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{1+u^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{u^\alpha}$ puis $I_\alpha(x) - I_\alpha(1) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^\alpha} \leqslant \int_1^x u^{-\alpha}\,\mathrm{d}u$, si $x \geqslant 1$. Ce qui donne $I_\alpha(x) - I_\alpha(1) \leqslant \left[\dfrac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x \boxed{\leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}}$ car $\alpha - 1 > 0$.

c) I_α est croissante et majorée (sur $\mathbb{R}^+$) par $I_\alpha(1) + \dfrac{1}{\alpha - 1}$ donc $\boxed{I_\alpha \text{ converge en } +\infty}$ par théorème de la limite monotone.

2. a) L'application $u \mapsto u^\alpha$ est une bijection $\mathcal{C}^1$, strictement croissante de $\left[x^{1/\alpha}, 1\right]$ sur $[x, 1]$ donc par changement de variable, on a $\displaystyle\int_x^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x^{1/\alpha}}^1 \frac{u^{\alpha(\beta-1)}}{1+u^\alpha}\alpha u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u = \boxed{\alpha \int_{x^{1/\alpha}}^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^\alpha}}$

b) On a $\lim\limits_{x\to 0} x^{1/\alpha} = 0$ et I_α est continue en 0 donc, par composition des limites, on a $\boxed{\lim\limits_0 J = \alpha I_\alpha(1)}$

3. a) On pose cette fois $t = u^{-\alpha}$: la fonction $u \mapsto u^{-\alpha}$ est $\mathcal{C}^1$ bijective et strictement décroissante de $[x, 1]$ sur $\left[1, x^{-1/\alpha}\right]$ et on trouve $K(x) = \displaystyle\int_{x^{-1/\alpha}}^1 \frac{u^{\alpha\beta}}{1+u^{-\alpha}}(-\alpha)u^{-1-\alpha}\,\mathrm{d}u = -\alpha\int_{x^{-1/\alpha}}^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^\alpha}$ donc on en conclut $\boxed{K(x) = \alpha(I_\alpha(x^{-1/\alpha}) - I_\alpha(1))}$

b) On a $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-1/\alpha} = +\infty$ donc par composition des limites, $\boxed{\lim\limits_0 K = \alpha(\lim\limits_{+\infty} I_\alpha - I_\alpha(1))}$

4. a) On a $\sigma_n(t) = \dfrac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}$ (car $t \neq -1$) donc (avec $t \geqslant 0$) $\left|\sigma_n(t) - \dfrac{1}{1+t}\right| = \dfrac{t^{n+1}}{1+t}$ $\boxed{\leqslant t^{n+1}}$

b) On a $|J(x) - J_n(x)| = \left|\displaystyle\int_x^1 \left(\frac{1}{1+t} - \sigma_n(t)\right)t^{\beta-1}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^1 \left|\frac{1}{1+t} - \sigma_n(t)\right| t^{\beta-1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^1 t^{n+\beta}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+\beta+1}}{n+\beta+1}\right]_x^1$, par inégalité triangulaire et car $x < 1$; donc $\boxed{|J(x) - J_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+\beta+1}}$

On trouve de même, $|K(x) - K_n(x)| \leqslant \displaystyle\int_x^1 t^{n-\beta}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n-\beta+1}$

c) $J_n(x) + K_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^n (-1)^k \int_x^1 t^{k+\beta-1}\,\mathrm{d}t + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_x^1 t^{k-\beta}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left[\frac{t^{k+\beta}}{k+\beta}\right]_x^1 + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{t^{k+1-\beta}}{k+1-\beta}\right]_x^1$

donc $\displaystyle\lim_0(K_n + J_n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\alpha}{1+k\alpha} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{\alpha}{1-(k+1)\alpha} = \alpha + \alpha\sum_{k=1}^n (-1)^k\left(\frac{1}{1+k\alpha} + \frac{1}{1-k\alpha}\right)$ ce qui donne $\boxed{\lim\limits_0(J_n + K_n) = \alpha + \dfrac{2X_n}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}}$

d) On a $\lim\limits_0(J + K) = \alpha \lim\limits_{+\infty} I_\alpha$ d'après **II.2** et **II.3** donc, en ajoutant les deux inégalités de **II.4.b** et en faisant tendre x vers 0, on obtient, par inégalité triangulaire, $\left|\alpha\lim\limits_{+\infty} I_\alpha - \alpha - \dfrac{2X_n}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}\right| \leqslant \dfrac{1}{n+1+\beta} + \dfrac{1}{n+1-\beta}$ pour tout n donc, en faisant tendre n vers $+\infty$ cette fois, on trouve $\alpha\lim\limits_{+\infty} I_\alpha = \alpha + \dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}\lim X_n$, ce qui donne, avec **I.3.d**,

$$\boxed{\lim_{+\infty} I_\alpha = \frac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}} = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^\alpha}}$$

Exercices :

1. On raisonne par récurrence sur $n \geqslant 1$:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1$ et $\dfrac{1^2 2^2}{4} = 1$ donc l'égalité est vraie pour $n = 1$.
- si on suppose l'égalité vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$ alors on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^3 + \sum_{k=1}^n k^3 \overset{\text{HR}}{=} (n+1)^3 + \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2}{4}[4(n+1) + n^2] = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ donc l'égalité est vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, on a bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$

2. a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{10^{2n+2}} \geqslant 0$ donc (u_n) croît ; $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \dfrac{1}{10^{2n+3}} - \dfrac{1}{10^{2n+1}} = \dfrac{1}{10^{2n+3}}(30 + 1 - 100) \leqslant 0$ donc (v_n) décroît ; enfin, $v_n - u_n = \dfrac{1}{10^{2n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$

b) On en déduit que (u_n) et (v_n) convergent vers le même réel ℓ.

c) Comme $\dfrac{1}{100} \neq 1$, on a $u_n = \dfrac{3}{100} \times \dfrac{1-10^{-2n}}{1-10^{-2}}$ donc $\boxed{\ell = \dfrac{1}{33}}$

3. a) sh, ch et arctan sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; arccos est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et on a $\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)} \in]0,1[$ pour $x>0$ donc par composition $x \mapsto \arccos \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\boxed{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})}$

Pour $x>0$, on a $f'(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(x)}{1+\operatorname{sh}^2(x)} - \dfrac{-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} \times \dfrac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}}} = \dfrac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} - \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} \times \dfrac{|\operatorname{ch}(x)|}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(x)-1}}$ puis $f'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)} - \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \times \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(x)}} = 0$ car $\sqrt{\operatorname{sh}^2(x)} = |\operatorname{sh}(x)| = \operatorname{sh}(x)$ si $x>0$.

b) Comme $\mathbb{R}^{+*}$ est un intervalle, on en déduit que f est constante et comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\arccos(1) = 0$, on en déduit $\boxed{f=0}$

4. Les solutions de l'équation homogène $y' - \tan(x)y = 0$ sont de la forme $y(x) = \alpha \exp(-\ln|\cos(x)|) = \dfrac{\alpha}{\cos(x)}$ avec une constante $\alpha \in \mathbb{R}$.

On peut remarquer qu'une solution particulière de l'équation complète est $y_p(x) = \tan(x)$ (*que l'on peut aussi déterminer par variation de la constante, ie en la cherchant sous la forme* $y_p(x) = \dfrac{\lambda(x)}{\cos(x)}$ *avec* λ *dérivable*)

Les solutions sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de l'équation complète sont donc définies par $\boxed{y(x) = \dfrac{\alpha}{\cos(x)} + \tan(x) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}}$

5. a) On vérifie $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et $P'''(1) \neq 0$ donc $\boxed{1 \text{ est racine triple de } P}$

b) Après calculs, on trouve $\boxed{P = (X-1)^3(X^3+X+1)}$

c) On a $X^3+X+1 = (X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$ (racines éventuellement complexes) donc $x_1+x_2+x_3 = 0$ (examiner le coefficient de X^2) et $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3} = \dfrac{1}{-1} = -1$ (avec les coefficients de X et constant cette fois)

6. a) Pour $((x,y,z),(x',y',z')) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, on a
$f(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')) = f(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z') = (\alpha x+\beta x'+\alpha y+\beta y', -\alpha x-\beta x'-\alpha y-\beta y', 0)$
donc $f(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')) = \alpha f(x,y,z) + \beta f(x',y',z')$; f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donc $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

b) $\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = 0\}$ donc $\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y=0\}$. On en déduit l'équivalence $u \in \ker(f) \Leftrightarrow \exists (x,z) \in \mathbb{R}^2, u = (x,-x,z) = x(1,-1,0) + z(0,0,1)$; ainsi $\boxed{\ker(f) = \operatorname{Vect}\{(1,-1,0),(0,0,1)\}}$

c) $v_1 = (1,-1,0)$ et $v_2 = (0,0,1)$ sont linéairement indépendants donc $\dim\ker(f) = 2$ et la formule du rang donne $\operatorname{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim\ker(f) = 3-2 = 1$ donc $\operatorname{Im}(f)$ est bien une droite. Comme $f(1,0,0) = (1,-1,0)$ est un vecteur non nul de cette droite, on a $\boxed{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\{(1,-1,0)\}}$

7. a) On vérifie $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $BE_{2,2} = E_{2,2}B = 0$ donc, par commutativité de B et $E_{2,2}$, on peut utiliser la formule du binôme de Newton : $A^n = (B+E_{2,2})^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_{2,2}^k B^{n-k}$. On vérifie ensuite $E_{2,2}^2 = E_{2,2}$ donc $E_{2,2}^k = E_{2,2}$ si $k \geqslant 1$ et pour $n \geqslant 1$, on a $A^n = B^n + \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} E_{2,2}B^{n-k}$. On a enfin $B^2 = 2B$ donc $B^p = 2^{p-1}B$ si $p \geqslant 1$ et $E_{2,2}B^p = 0$. Il reste $A^n = 2^{n-1}B + E_{2,2}B^0 = 2^{n-1}B + E_{2,2}$, ie $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \text{ si } n \geqslant 1}$

b) On vérifie $AC = 0$

c) Comme $C \neq 0$, on en déduit que $\boxed{A \text{ n'est pas inversible}}$ (sinon, en multipliant $AC = 0$ à gauche par A^{-1}, on aurait $C = 0$)

8. a) On vérifie $A^2 = A$ donc $\boxed{f \text{ est un projecteur}}$

b) $f(x,y,z) = (x,y,z) \Leftrightarrow x+z = 0$ donc $\boxed{\ker(f-id) = \operatorname{Vect}\{(1,0,-1),(0,1,0)\}}$ (même démarche que pour l'ex **6**)

c) On trouve aussi $f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-z=0 \\ -x+2y-z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=z$ donc $\boxed{\ker(f)=\mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}}$

d) Si on note $P=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(v_1,v_2,v_3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\det(P)=2$ donc $\mathcal{B}'$ est une base de E

e) Comme $f(v_1)=v_1$, $f(v_2)=v_2$ et $f(v_3)=v_3$, on a $\boxed{A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

9. a) $\boxed{u(x,y,z)=(-3x+2y+2z, 2x-y, -6x+4y+3z)}$

b) $u(x,y,z)=(x,y,z) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -4x+2y+2z=0 \\ 2x-2y=0 \\ -6x+4y+2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=z$ donc $\ker(u-id)=\mathrm{Vect}\{w_1\}$ avec $\boxed{w_1=(1,1,1)}$ par exemple.

De même $u(x,y,z)=-(x,y,z) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -2x+2y+2z=0 \\ 2x=0 \\ -6x+4y+2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=0 \\ y=-z \end{array}\right.$ donc $\ker(u+id)=\mathrm{Vect}\{w_2\}$ avec $\boxed{w_2=(0,1,-1)}$

c) On cherche un vecteur w_3 de sorte que $u(w_3)=w_2-w_3$ donc $(u+id)(w_3)=w_2=(0,1,-1)$; après calcul, le vecteur $\boxed{w_3=\frac{1}{2}(1,1,0)}$ convient (mais il n'est pas unique)

On vérifie que $\mathcal{B}$ est une base : si $\boxed{P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$ alors $\det(P)=-\frac{1}{2}\neq 0$ donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base}}$ dans laquelle la matrice de u est bien M' par construction des vecteurs w_1,w_2,w_3 (et P est alors la matrice de passage demandée à la question suivante).

d) $\boxed{M=PM'P^{-1}}$

10. a) En développant D_{2n+2} par la première colonne puis chacun des deux déterminants (de taille $2n+1$) par la première ligne, on obtient $\boxed{D_{2n+2}=(a^2-b^2)D_{2n}}$

b) Comme $D_2=a^2-b^2$, on en déduit (suite géométrique ou récurrence) $\boxed{D_{2n}=(a^2-b^2)^n}$