L'usage des calculatrices est interdit

PROBLEME

(Inspiré de CCP PSI 2016 et Mines-Ponts PSI 2007 maths 1)

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles.
On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et X_n la matrice (colonne) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les coordonnées valent 1 :

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{i,j}$ ses coefficients.

Définition :

1. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si tous ses coefficients sont positifs ou nuls et si $MX_n = X_n$.
   On note $\mathcal{ST}_n$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *strictement stochastique* si tous ses coefficients sont strictement positifs et si $MX_n = X_n$.
   On note $\mathcal{ST}_n^+$ l'ensemble des matrices strictement stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ie une famille de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients dépendent de $k \in \mathbb{N}$), on dira que la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice N si

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], \lim_{k\to+\infty} m_{i,j}(k) = n_{i,j},$$

où $m_{i,j}(k)$ désigne les coefficients de la matrice M_k et $n_{i,j}$ ceux de N. On écrira alors $\lim\limits_{k\to+\infty} M_k = N$.

Par exemple, si $M_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & \cos\left(\dfrac{1}{k}\right) \\ -1+e^{-k} & 0 \end{pmatrix}$, alors on a $\lim\limits_{k\to+\infty} M_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

I Étude de 2 exemples

1. Un exemple en dimension 3

Dans cette partie, on considère les matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad P = \frac{1}{6}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = I_3 - P$$

1. Vérifier que $P \in \mathcal{ST}_3^+$

2. Réduction de B

a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(B - I_3) \oplus \ker(B - 3I_3) \oplus \ker(B - 6I_3)$ et déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à cette décomposition.
On choisira des vecteurs dont la première coordonnée est 1.

b) En déduire une matrice $Q \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$P = QDQ^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$, D^j et en déduire que la suite $\left(\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} D^j\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice Δ que vous expliciterez.

Dans la suite de cette partie, on admettra que la suite $\left(\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}P^j\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge et que

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}P^j = Q\Delta Q^{-1}$$

3. Une expression de la limite

a) Déterminer un polynôme $L\in\mathbb{R}_2[X]$ tel que $\begin{cases} L(1/6)=L(1/2)=0 \\ L(1)=1 \end{cases}$

b) Calculer $L(P)$ en fonction de Q et Q^{-1} et en déduire les coefficients de la matrice $Q\Delta Q^{-1}$.

4. Pseudo inverse de A

On rappelle que d'après les calculs précédents, on a, entre autres, $A=Q\begin{pmatrix}5/6&0&0\\0&1/2&0\\0&0&0\end{pmatrix}Q^{-1}$.

On pose $A'=Q\begin{pmatrix}6/5&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}Q^{-1}$.

a) Vérifier que A et A' commutent.

b) Déterminer les matrices $AA'A$ et $A'AA'$ en fonction de A et A'.

c) Calculer I_3-AA'.

2. Le cas de la dimension 2

On suppose dans cette partie que $n=2$ et, pour $\alpha\in[0,1]$ et $\beta\in[0,1]$ avec $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, on note :

$$A(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}1-\alpha&\alpha\\\beta&1-\beta\end{pmatrix}$$

On notera aussi $\lambda=1-(\alpha+\beta)$.

5. Calculer $\Big(A(\alpha,\beta)-I_2\Big)\times\Big(A(\alpha,\beta)-\lambda I_2\Big)$

6. En déduire, pour tout entier $k\in\mathbb{N}^*$, $A(\alpha,\beta)^k=\frac{1-\lambda^k}{1-\lambda}A(\alpha,\beta)+\frac{\lambda-\lambda^k}{\lambda-1}I_2$.

Afin que cette expression reste valable pour $k=0$ lorsque $\lambda=0$, on prendra comme convention $0^0=1$.

7. Montrer que, pour $(\alpha,\beta)\neq(1,1)$, la suite $(A(\alpha,\beta)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L(\alpha,\beta)$ que l'on précisera. Que se passe-t-il pour $(\alpha,\beta)=(1,1)$?

8. Déterminer, lorsque $(\alpha,\beta)\neq(1,1)$, $\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}A(\alpha,\beta)^j$

II Généralités sur les matrices stochastiques

1. Structure

a) Montrer que $\mathcal{ST}_n$ est stable par produit, c'est-à-dire que pour tout couple $(M,N)\in\mathcal{ST}_n^2$, on a $MN\in\mathcal{ST}_n$. $\mathcal{ST}_n^+$ est-il aussi stable par produit ?

b) $\mathcal{ST}_n$ et ST_n^+ sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2. Un calcul de rang

Dans cette question, M est une matrice de $\mathcal{ST}_n^+$.

a) Montrer que, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a $\sum_{j=1}^{n}m_{i,j}=1$.

b) Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ un vecteur de $\ker(I_n-M)$. On note i_0 un indice pour lequel on a $|x_{i_0}|=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j|$.

Montrer que $\sum_{j=1}^{n}m_{i_0,j}(x_{i_0}-x_j)=0$.

c) En examinant le signe des termes de la somme précédente, prouver que $X\in\mathrm{Vect}\{X_n\}$.

d) En déduire $\mathrm{rg}(I_n-M)=n-1$.

III Pseudo inverse

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

i. $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(a^2)$.
ii. $\ker(a) = \ker(a^2)$.
iii. $E = \mathrm{Im}(a) \oplus \ker(a)$.
iv. Il existe un entier naturel $r \leqslant n$, une matrice $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible tels que $A = Q \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$.

2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un pseudo inverse de A lorsque les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} AA' &= A'A \\ A &= AA'A \\ A' &= A'AA' \end{aligned}$$

a) Montrer que si A admet un pseudo inverse alors on a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$.
b) Réciproquement, on suppose que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$. En utilisant la propriété iv. de la question **III.1**, montrer que A admet un pseudo inverse.

3. On souhaite maintenant démontrer que A admet au plus un pseudo inverse. Pour cela on considère A'' un pseudo inverse quelconque de A. On note a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A et a'' celui associé à A''.

a) Montrer que $\ker(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$ sont stables par a''.
b) En déduire qu'il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ telle que $A'' = Q \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$, l'entier r et la matrice Q étant ceux obtenus à la question **III.1.**iv.
c) Montrer que $a \circ a''$ est un projecteur de $\mathbb{R}^n$ dont on précisera le noyau et l'image en fonction de ceux de a. Préciser ce que vaut $Q^{-1}(AA'')Q$.
d) Montrer que A admet au plus un pseudo inverse.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que A admet un pseudo inverse et le déterminer.

IV Calcul de limite

Dans cette dernière partie, P désigne une matrice de $\mathcal{ST}_n^+$ et on pose $A = I_n - P$

1. Justifier que $\mathrm{rg}(A) = n - 1$.

On admettra que l'on a aussi $\mathrm{rg}(A^2) = n - 1$, ce qui assure, d'après la partie **III**, l'existence et l'unicité d'un pseudo inverse A' de A.

2. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Établir, pour tout entier non nul k, l'identité

$$\sum_{j=0}^{k-1} (I_n - C)^j = \left(I_n - (I_n - C)^k\right) C^{-1}.$$

On pourra commencer par déterminer le polynôme $\left(\sum_{j=0}^{k-1} X^j\right)(1 - X)$.

3. Établir, pour tout entier non nul k, l'identité suivante

$$\sum_{j=0}^{k-1} P^j = (I_n - P^k)A' + k(I_n - AA')$$

4. Montrer que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j$$

existe et donner sa valeur en fonction de I_n, A et A'.

5. Montrer que $(I_n - AA')$ est stochastique et que $(I_n - AA')A = 0$.

6. Montrer qu'il existe un vecteur colonne non nul $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$I_n - AA' = X_n Y^T$$