Correction du DS2

Partie I

1. P est bien à coefficients strictement positifs et on vérifie $P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\boxed{P\in\mathcal{ST}_3^+}$

2. a) On vérifie $\ker(B-I_3)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$ puis $\ker(B-3I_3)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$ et $\ker(B-6I_3)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Si $\boxed{Q=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\0&-2&1\end{pmatrix}}$ alors $\det(Q)=6$ donc Q est inversible et la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On en déduit $\boxed{\mathbb{R}^3=\ker(B-I_3)\oplus\ker(B-3I_3)\oplus\ker(B-6I_3)}$

b) D'après le choix des vecteurs colonne de Q, on a $B=Q\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}Q^{-1}$ donc $\boxed{P=QDQ^{-1}}$

c) On vérifie, pour $j\in\mathbb{N}$, $\boxed{D^j=\begin{pmatrix}6^{-j}&0&0\\0&2^{-j}&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$ donc $\displaystyle\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}D^j=\begin{pmatrix}\frac{6}{5k}(1-6^{-k})&0&0\\0&\frac{2}{k}(1-2^{-k})&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et on obtient $\boxed{\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}D^j=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$

3. a) Il s'agit d'un des polynômes interpolateurs de Lagrange $L=\dfrac{(X-1/6)(X-1/2)}{(1-1/6)(1-1/2)}$ donc $\boxed{\frac{1}{5}(6X-1)(2X-1)}$

b) On a $L(P)=QL(D)Q^{-1}$ et $L(D)=\begin{pmatrix}L(1/6)&0&0\\0&L(1/2)&0\\0&0&L(1)\end{pmatrix}=\Delta$ donc $L(P)=Q\Delta Q^{-1}$. On calcule par ailleurs $L(P)=\dfrac{1}{5}(6P-I_3)(2P-I_2)=\dfrac{1}{15}(B-I_3)(B-3I_3)=\boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}}$

4. a) On vérifie $\boxed{AA'=A'A=Q\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}Q^{-1}}$

b) On en déduit $\boxed{AA'A=A\text{ et }A'AA'=A'}$

c) $I_3-AA'=Q\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}Q^{-1}=Q\Delta Q^{-1}$ donc $\boxed{I_3-AA'=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}}$

5. On a $(A-I_2)(A-\lambda I_2)=\begin{pmatrix}-\alpha&\alpha\\\beta&-\beta\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\beta&\alpha\\\beta&\alpha\end{pmatrix}$ donc $\boxed{(A-I_2)(A-\lambda I_2)=0}$

6. On prouve le résultat par récurrence sur k :

— $\dfrac{1-\lambda^1}{1-\lambda}A+\dfrac{\lambda-\lambda^1}{\lambda-1}I_2=A$ donc l'égalité est vérifiée pour $k=1$.

— si on suppose l'égalité vérifiée au rang k alors on a $A^{k+1}=A^k\times A\overset{\text{HR}}{=}\dfrac{1-\lambda^k}{1-\lambda}A^2+\dfrac{\lambda-\lambda^k}{\lambda-1}A$ et, avec la question précédente, on a $A^2=(1+\lambda)A-\lambda I_2$ donc $A^{k+1}=\left(\dfrac{\lambda-\lambda^k}{\lambda-1}+(1+\lambda)\dfrac{1-\lambda^k}{1-\lambda}\right)A-\lambda\dfrac{1-\lambda^k}{1-\lambda}I_2$, ce qui donne le résultat au rang $k+1$ car $\dfrac{\lambda-\lambda^k}{\lambda-1}+(1+\lambda)\dfrac{1-\lambda^k}{1-\lambda}=\dfrac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}$ et $-\lambda\dfrac{1-\lambda^k}{1-\lambda}=\dfrac{\lambda-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}$

Ce résultat peut aussi se démontrer en déterminant le reste de la division euclidienne du polynôme X^k par le polynôme $(X-1)(X-\lambda)$ qui est annulateur de A.

7. On commence par remarquer que $\alpha+\beta\in]0,2]$ donc $\lambda\in[-1,1[$ avec $\lambda=-1\Leftrightarrow\alpha=\beta=1$.

Ainsi, si $(\alpha,\beta)\neq(1,1)$ on a $|\lambda|<1$ donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}A^k=\frac{1}{1-\lambda}(A-\lambda I_2)$, ie $\boxed{L(\alpha,\beta)=\frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix}\beta&\alpha\\\beta&\alpha\end{pmatrix}}$

Si $(\alpha,\beta)=(1,1)$ alors $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ et $A^2=I_2$ donc $A^{2k}=I_2$ et $A^{2k+1}=A$ donc la suite $(A(1,1)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

8. $\displaystyle\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}A^j=\frac{1}{k}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1-\lambda^j}{1-\lambda}\right)A+\frac{1}{k}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\lambda-\lambda^j}{\lambda-1}\right)I_2$ puis, comme $\lambda\neq 1$, $\displaystyle\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1-\lambda^j}{1-\lambda}=\frac{1}{k(1-\lambda)}\left(k-\frac{1-\lambda^k}{1-\lambda}\right)$ donc $\displaystyle\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1-\lambda^j}{1-\lambda}\xrightarrow[k\to+\infty]{}\frac{1}{1-\lambda}$; de même $\displaystyle\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\lambda-\lambda^j}{\lambda-1}\xrightarrow[k\to+\infty]{}\frac{\lambda}{\lambda-1}$ donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}A^j=\frac{1}{1-\lambda}A+\frac{\lambda}{\lambda-1}I_2$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}A(\alpha,\beta)^j=L(\alpha,\beta)}$

Partie II

1. a) On a $(MN)_{i,j}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}m_{i,k}n_{k,j}\geqslant 0$ car les coefficients de M et N sont positifs ; de plus $(MN)X_n=M(NX_n)$ donc $(MN)X_n=MX_n=X_n$ donc $MN\in\mathcal{ST}_n$. La valeur des coefficients de MN prouve aussi que si les coefficients de M et N sont strictement positifs alors ceux de MN le sont aussi : $\boxed{\mathcal{ST}_n \text{ et } \mathcal{ST}_n^+ \text{ sont stables par produit}}$

b) La matrice nulle n'appartient ni à $\mathcal{ST}_n$, ni à $\mathcal{ST}_n^+$ car $0X_n=0\neq X_n$ donc $\boxed{\mathcal{ST}_n \text{ et } \mathcal{ST}_n^+ \text{ ne sont pas des sous-espaces vectoriels de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

2. a) On a $MX_n=X_n$ et $(MX_n)_i=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}m_{i,k}\times 1$ donc, en identifiant les coordonnées entre les vecteurs MX_n et X_n, on a $\boxed{\forall i\in[\![1,n]\!]\,,\displaystyle\sum_{k=1}^{n}m_{i,k}=1}$

b) On a donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}m_{i_0,j}(x_{i_0}-x_j)=x_{i_0}\sum_{j=1}^{n}m_{i_0,j}-\sum_{j=1}^{n}m_{i_0,j}x_j=x_{i_0}-(MX)_{i_0}=0$ puisque $MX=X$.

c) Puisque, par définition de i_0, on a $|x_j|\leqslant|x_{i_0}|$ et $m_{i_0,j}\geqslant 0$, tous les termes de la somme précédente sont du même signe (positifs si $x_{i_0}\geqslant 0$ et négatifs si $x_{i_0}\leqslant 0$). Comme la somme est nulle, tous les termes sont donc nuls. On a $\forall j\in[\![1,n]\!]\,,m_{i_0,j}(x_{i_0}-x_j)=0$, ce qui donne $x_j=x_{i_0}$ car $m_{i_0,j}>0$. Toutes les coordonnées de X sont donc égales à x_{i_0} et $X=x_{i_0}X_n$, ie $\boxed{X\in\operatorname{Vect}\{X_n\}}$

d) On vient de prouver $\ker(I_n-M)\subset\operatorname{Vect}\{X_n\}$; réciproquement, comme M est stochastique, on a $MX_n=X_n$ donc $X_n\in\ker(I_n-M)$ et $\ker(I_n-M)=\operatorname{Vect}\{X_n\}$. Avec $X_n\neq 0$, on en déduit $\dim(\ker(I_n-M))=1$ et avec le théorème du rang $\boxed{\operatorname{rg}(I_n-M)=n-1}$

Partie III

1. i)⇒ii) On a $\ker(a)\subset\ker(a^2)$, et si $\operatorname{rg}(a)=\operatorname{rg}(a^2)$, d'après la formule du rang, on a $\dim\ker(a)=\dim\ker(a^2)$ donc $\ker(a)=\ker(a^2)$.

ii)⇒iii) Si $x\in\ker(a)\cap\operatorname{Im}(a)$, on a $x=a(x')$ pour un $x'\in E$ et $0=a(x)=a^2(x')$ donc $x'\in\ker(a^2)=\ker(a)$. Ainsi, $x=a(x')=0$ donc $\operatorname{Im}(a)\cap\ker(a)=\{0\}$. Puis d'après la formule du rang, on a $E=\operatorname{Im}(a)\oplus\ker(a)$.

iii)⇒iv) Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E=\operatorname{Im}(a)\oplus\ker(a)$, on a $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}B&0\\0&0\end{pmatrix}$ car $\operatorname{Im}(a)$ est stable par a, avec $B\in\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ où $r=\dim\operatorname{Im}(a)=\operatorname{rg}(a)$. On a alors $\operatorname{rg}(a)=r=\operatorname{rg}(B)$ donc B est inversible. On a donc iv) avec P la matrice de passage de la base canonique de E à la base $\mathcal{B}$.

iv)⇒i) On a $\operatorname{rg}(a)=\operatorname{rg}(B)=r$ car B est inversible et $\operatorname{rg}(a^2)=\operatorname{rg}(A^2)=\operatorname{rg}(B^2)=r$ car B^2 est inversible.

2. a) On a $\operatorname{rg}(A^2)\leqslant\operatorname{rg}(A)$ et si A admet un pseudo-inverse A' alors $A=AA'A$ et $AA'=A'A$ donc $A=A^2A'$ puis $\operatorname{rg}(A)\leqslant\min(\operatorname{rg}(A'),\operatorname{rg}(A^2))\leqslant\operatorname{rg}(A^2)$ donc $\boxed{\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(A^2)}$

b) Si $A=P\begin{pmatrix}B&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}$ avec P et B inversibles, il suffit de prendre $\boxed{A'=P\begin{pmatrix}B^{-1}&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}}$

3. a) a et a'' commutent donc $\boxed{\ker(a) \text{ et } \operatorname{Im}(a) \text{ sont stables par } a''}$

b) Si $A=P\begin{pmatrix}B&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}$, alors P est la matrice de passage de la base canonique à une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(a)=\begin{pmatrix}B&0\\0&0\end{pmatrix}$. Ainsi, si $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_r,e_{r+1},\dots,e_n)$, comme B est inversible, on a :
$\ker(a)=\operatorname{Vect}\{e_{r+1},\dots,e_n\}$ et $\operatorname{Im}(a)=\operatorname{Vect}\{e_1,\dots,e_r\}$. (Ce qui prouve en fait qu'une telle base est obligatoirement une base adaptée à la décomposition $E=\operatorname{Im}(a)\oplus\ker(a)$.)

Comme $\ker(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$ sont stables par a'', la matrice de a'' dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a'') = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}$. Enfin, on vérifie que si $A'' = A''AA''$, on a $D' = 0$ donc $\boxed{A'' = P\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}}$

c) Si $A = AA''A$, alors $AA'' = AA''AA'' = (AA'')^2$ donc $\boxed{a \circ a'' \text{ est un projecteur}}$

On a $\ker(a) \subset \ker(a'' \circ a)$ et comme $a = a \circ (a'' \circ a)$, on a $\ker(a'' \circ a) \subset \ker(a)$ donc $\boxed{\ker(a \circ a'') = \ker(a)}$ car $a \circ a'' = a'' \circ a$.

De même, $\mathrm{Im}(a \circ a'') \subset \mathrm{Im}(a)$ et comme $a = (a \circ a'') \circ a$, on a $\mathrm{Im}(a) \subset \mathrm{Im}(a \circ a'')$ puis $\boxed{\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Im}(a \circ a'')}$

(*on peut aussi montrer une inclusion et utiliser la formule du rang en repartant de l'égalité des noyaux.*)

On a $\boxed{P^{-1}(AA'')P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ car c'est la matrice du projecteur $a \circ a''$ écrite dans une base adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(a \circ a'') \oplus \ker(a \circ a'')$.

d) On en déduit que $BD = I_r$ donc $D = B^{-1}$ et l'unique pseudo-inverse est celui obtenu à la question **III.2.b.**

4. On détermine des bases de $\ker(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$: par exemple $((1,1,1),(0,1,0))$ est une base de $\mathrm{Im}(a)$ et $(0,1,-1)$ un vecteur directeur de $\ker(a)$. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui est inversible (ce qui signifie que $E = \mathrm{Im}(a) \oplus \ker(a)$ et assure donc l'existence du pseudo-inverse). On a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A' = P\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$

On conclut donc $\boxed{A' = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 7 & -4 & -4 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$ car $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Partie IV

1. D'après la partie **II**, on a $\boxed{\mathrm{rg}(A) = n-1}$

2. On utilise l'égalité de polynômes $\left(\sum_{j=0}^{k-1} X^j\right)(1-X) = 1 - X^k$ et on l'applique à la matrice $I_n - C$: on en déduit $\left(\sum_{j=0}^{k-1}(I_n - C)^j\right)(I_n - (I_n - C)) = I_n - (I_n - C)^k$ donc $\left(\sum_{j=0}^{k-1}(I_n - C)^j\right)C = I_n - (I_n - C)^k$. La matrice C étant inversible, il suffit alors de multiplier cette égalité à droite par C^{-1}.

3. Avec les notations de la partie **III**, avec $r = \mathrm{rg}(A) = n-1$: $A = Q\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$ donc $P = Q\begin{pmatrix} I_{n-1} - B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}Q^{-1}$ et $P^j = Q\begin{pmatrix} (I_{n-1} - B)^j & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}Q^{-1}$ puis $\sum_{j=0}^{k-1} P^j = Q\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{k-1}(I_{n-1} - B)^j & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}Q^{-1}$. La matrice B étant inversible, on peut utiliser le résultat de **IV.2**, ce qui donne $\sum_{j=0}^{k-1} P^j = Q\begin{pmatrix} (I_{n-1} - (I_{n-1} - B)^k)B^{-1} & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}Q^{-1}$. D'autre part, $(I_n - P^k)A' = Q\begin{pmatrix} I_{n-1} - (I_{n-1} - B)^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1} \times Q\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1} = Q\begin{pmatrix} (I_{n-1} - (I_{n-1} - B)^k)B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$ et $k(I_n - AA') = kI_n - kQ\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1} = Q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}Q^{-1}$ ce qui donne $\boxed{\sum_{j=0}^{k-1} P^j = (I_n - P^k)A' + k(I_n - AA')}$

4. On en déduit $\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j = (I_n - AA') + \frac{1}{k}A' - \frac{1}{k}P^kA'$. Comme A' est constante, on a $\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k}A' = 0$. De plus, $\mathcal{ST}_n$ étant stable par produit, P^k est aussi stochastique donc tous ses coefficients sont dans $[0,1]$ (donc bornés) et $\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k}P^k = 0$. On en déduit donc $\boxed{\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j = I_n - AA'}$

5. Les coefficients de P étant positifs, ceux de P^j aussi (avec la formule du produit matriciel) donc ceux de $\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j$ le sont aussi. Par passage à la limite, les coefficient de $I_n - AA'$ sont donc positifs (mais pas forcément strictement positifs puisque le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes).

De plus on a $PX_n = X_n$ donc $P^j X_n = X_n$ et $\left(\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} P^j\right) X_n = X_n$; on vérifie alors que, les coefficients de X_n ne dépendant pas de k, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\dfrac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j\right) X_n = (I_n - AA')X_n$ (pour une preuve rigoureuse, il suffit d'introduire les coefficients de la matrice $\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} P^j$ et effectuer la produit matriciel avec X_n) et donc $(I_n - AA')X_n = X_n$ et $\boxed{I_n - AA' \in \mathcal{ST}_n}$

En développant, on a $(I_n - AA')A = A - AA'A = 0$.

6. La dernière égalité prouve que $\mathrm{Im}(A) \subset \ker(I_n - AA')$ donc $\dim(\ker(I_n - AA')) \geqslant \mathrm{rg}(A) = n-1$ et $\mathrm{rg}(I_n - AA') \leqslant 1$. De plus $X_n = (I_n - AA')X_n \in \mathrm{Im}(I_n - AA')$ donc $\mathrm{rg}(A_n - AA') = 1$ et $\mathrm{Im}(I_n - AA') = \mathrm{Vect}\{X_n\}$ (car $X_n \neq 0$).

Les colonnes de $I_n - AA'$ sont donc de la forme $y_j X_n$ avec $y_j \in \mathbb{R}$. Il suffit alors de poser $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ pour avoir $\boxed{I_n - AA' = X_n Y^T}$ et on a bien $Y \neq 0$ sinon $I_n - AA'$ serait nulle donc pas stochastique.

On pouvait aussi utiliser les résultats de la partie III qui assurent que $I_n - AA'$ est la matrice du projecteur sur $\ker(A)$ *parallèlement à* $\mathrm{Im}(A)$, *donc de rang* 1.