L'usage des calculatrices est interdit

Le problème suivant se divise en quatre parties ; certaines questions peuvent nécessiter d'utiliser les résultats des questions précédentes. Lorsque vous utilisez le résultat d'une question précédente du problème, vous indiquerez très clairement le numéro de celle-ci.

PROBLEME

(Inspiré de E4A PSI 2003 maths A et CCP MP 2002 maths 1)

Dans tout ce problème, (a_n) est une suite d'éléments non nuls de $\mathbb{C}$. On lui associe la suite (p_n) définie par :

$$p_n = \prod_{k=1}^n a_k.$$

Dans tout le problème, on définira aussi la suite (u_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 1 + u_n$$

Lorsque (p_n) converge, on note p sa limite. Dans ce cas, on dira aussi que le produit $\prod_{n \geq 1} a_n$ converge (ou existe) et on notera

$$\prod_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = p$$

Lorsque la suite (a_n) est réelle et lorsque (p_n) diverge vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$), on dit que (p_n) admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite.

I Partie I : Étude d'exemples

1. Calculer p_n lorsque $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{n}{n+1}$ et en déduire la limite de p de (p_n) dans ce cas.
2. Faire de même lorsque $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$.
3. Dans cette question, on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 1 - \frac{1}{4n^2}$ et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$.
 - a) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer, pour tout $n \geq 0$, une relation entre w_{n+2} et w_n .
 - b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad w_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

- c) Déterminer, pour $n \geq 1$, la valeur de a_n en fonction de w_{2n-2} , w_{2n-1} , w_{2n} et w_{2n+1} et en déduire

$$p_n = \frac{2}{\pi} \times \frac{w_{2n}}{w_{2n+1}}$$

- d) Grâce à la formule de Stirling, déterminer la limite p de (p_n) .
On pourra commencer par remarquer que $(2n+1)! = (2n+1) \times (2n)! \sim (2n) \times (2n)!$

II Étude du cas réel

Dans cette partie, on suppose que la suite (a_n) , donc la suite (p_n) , est à valeurs réelles.

1. Prouver que, si (p_n) converge vers p différent de 0, alors (a_n) converge vers 1.

On suppose, dans toute la suite de cette partie, que la suite (a_n) est à valeurs strictement positives ; la suite (u_n) est donc à valeurs dans $] -1, +\infty[$.

2. Montrer que la série $\sum \ln(a_n)$ converge si et seulement si la suite (p_n) converge vers $p > 0$.
3. a) En déduire, si on suppose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0$, que la suite (p_n) converge vers $p > 0$ si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

- b) On suppose que la suite des sommes partielles de la série $\sum \ln(a_n)$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. Préciser, dans chacun de ces deux cas, la limite de la suite (p_n) .
4. On suppose, dans cette question, que la série $\sum u_n$ converge.
- a) Montrer que, si la série $\sum u_n^2$ converge, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.
- b) Montrer que, si la série $\sum u_n^2$ diverge, alors la suite (p_n) converge et $p = 0$.
5. Prouver que, si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.
6. Application 1 : étudier la convergence de (p_n) lorsque $a_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n^2}$.
7. Application 2 : on suppose dans cette question que $u_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\sqrt{n}}}{1+t^2} dt$ et on pose à nouveau $a_n = 1 + u_n$.
- a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$ et en déduire la nature de $\sum u_n$.
- b) En utilisant, entre autres, le changement de variable $x = t\sqrt{n}$, déterminer un équivalent de $|u_n|$ quand n tend vers $+\infty$.
- c) Déterminer la limite de la suite (p_n) dans ce cas.
8. Dans cette question on suppose que la suite (u_n) est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n-1} = \frac{-1}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad u_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

- a) Calculer $(1 + u_{2n-1})(1 + u_{2n})$; quelle valeur de p_{2n} en déduit-on ?
- b) Justifier que la suite (p_n) converge vers $p > 0$.
- c) Calculer $u_{2n-1} + u_{2n}$ et en déduire la nature de $\sum u_n$.
- d) Que peut-on en déduire sur la réciproque de la question **II.4** ?

III Étude du cas complexe

Dans cette partie, on suppose que la suite (a_n) , donc la suite (p_n) , est à valeurs complexes. On suppose de plus que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

- Montrer que la suite (p_n) est bornée ; on pourra utiliser certains résultats de la partie **II**.
- En considérant $p_{n+1} - p_n$, justifier que la suite (p_n) converge.
- Justifier que la suite $\left(\frac{1}{p_n}\right)$ converge et en déduire que la limite de (p_n) est non nulle.
- Application :
 - Justifier, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, la convergence des produits $\prod_{n \geq 1} (1 + z^n)$ et $\prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - z^{2n-1}}$.
 - Simplifier l'écriture du produit $\prod_{k=1}^n (1 - z^{2k-1}) \times \prod_{k=1}^n (1 + z^k) \times \prod_{k=1}^n (1 - z^k)$.
 - En déduire $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + z^n) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - z^{2n-1}}$.
- On suppose dans cette question que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = i \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $a_n = 1 + u_n$.
 - La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?
 - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} |p_n|$ et en déduire la nature de la suite (p_n) .
 - Le résultat de la question **II.4** est-il aussi valable pour une suite complexe ?

IV Fonction Gamma et formule de Weierstrass

On définit, pour tout $x > 0$, la fonction Gamma par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Dans toute cette partie, x désigne un réel strictement positif fixé.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Justifier que $\Gamma(x) > 0$.
3. Montrer, en utilisant le théorème de convergence dominée que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$

4. À l'aide d'un changement de variable, prouver que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x I_n(x)$, où

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$$

5. a) Déterminer, pour $n \geq 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.
b) En déduire la valeur de $I_n(x)$, pour $n \geq 1$.
6. Montrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x \times n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$$

7. a) Vérifier que, pour $x \in]0, 1[$,

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

- b) En déduire la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
8. a) Un résultat intermédiaire : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer qu'il existe une constante γ (que l'on ne cherchera pas à déterminer) telle que

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

- b) En déduire la formule de Weierstrass : pour $x > 0$,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} e^{-x/n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)$$