Correction du DS3

Partie I

1. On a $p_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = 0}$

2. On a $a_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ donc $p_n = \frac{\prod_{k=1}^{n} k \times \prod_{k=1}^{n}(k+2)}{\prod_{k=1}^{n}(k+1)^2} = \frac{\prod_{k=1}^{n} k \times \prod_{h=3}^{n+2} h}{\prod_{h=2}^{n+1} h^2} = \frac{2(n+1)(n+2)}{4(n+1)^2}$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}}$

3. a) Fait en cours : on trouve $\boxed{w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n}$

b) Le résultat étant donné, on le vérifie par récurrence sur n :

— $w_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $w_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\,\mathrm{d}t = \Big[-\sin t\Big]_0^{\pi/2} = 1$ donc le résultat est vrai au rang $n = 0$.

— si on suppose $w_{2n} = \frac{\pi(2n)!}{2 \times 4^n (n!)^2}$ et $w_{2n+1} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ alors

$w_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} w_{2n} \overset{\text{HR}}{=} \frac{\pi(2n+1)!}{4 \times 4^n (n+1)! \times n!} = \frac{(2n+2)}{2(n+1)} \times \frac{\pi(2n+1)!}{4 \times 4^n(n+1)! \times n!} = \frac{\pi(2n+2)!}{2 \times 4^{n+1}((n+1)!)^2}$

et $w_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} w_{2n+1} \overset{\text{HR}}{=} \frac{(2(n+1))^2}{(2n+3)(2n+2)} \times \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}$ d'où le résultat pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) On a $a_n = \frac{(2n+1)(2n-1)}{(2n)^2}$ puis $\frac{w_{2n}}{w_{2n-2}} = \frac{2n-1}{2n}$ et $\frac{w_{2n+1}}{w_{2n-1}} = \frac{2n}{2n+1}$ donc $a_n = \frac{w_{2n}/w_{2n-2}}{w_{2n+1}/w_{2n-1}}$ ou $\boxed{a_n = \frac{w_{2n-1}w_{2n}}{w_{2n-2}w_{2n+1}}}$ On en déduit (comme en **I.2**), $\boxed{p_n = \frac{w_1 w_{2n}}{w_0 w_{2n+1}} = \frac{2w_{2n}}{\pi w_{2n+1}} = \frac{((2n)!)^2}{4^{2n}(n!)^4} \times (2n+1)}$

d) On a $2n+1 \sim 2n$ et avec la formule de Stirling, $\frac{((2n)!)^2}{4^{2n}(n!)^4} \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n}(4\pi n)}{4^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}(2\pi n)^2} = \frac{1}{n\pi}$ donc, par produit d'équivalents, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}}$

Partie II

1. On a $a_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{p}{p}$ donc $\boxed{\text{si } \lim p_n = p > 0 \text{ alors } \lim a_n = 1}$

2. (p_n) converge vers $p > 0$ si et seulement si $(\ln(p_n))$ converge vers $\ell = \ln(p) \in \mathbb{R}$. De plus, $\ln(p_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k)$ donc

$\boxed{(p_n) \text{ converge vers } p > 0 \text{ si et seulement si } \sum \ln(a_n) \text{ converge}}$

3. a) Si (p_n) converge vers $p > 0$ alors $\sum \ln(a_n)$ converge et $\lim a_n = 1$ donc $\lim u_n = 0$. On a alors l'équivalent $\ln(a_n) = \ln(1 + u_n) \sim u_n$ (SATP) donc $\sum u_n$ converge. Réciproquement, si $\sum u_n$ converge alors $\lim u_n = 0$ donc $\ln(a_n) \sim u_n$ (SATP) et $\sum \ln(a_n)$ converge donc (p_n) converge vers $p > 0$. On a donc bien l'équivalence.

b) Si $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k) = +\infty$ alors, comme $p_n = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(a_k)\right)$, on a $\boxed{\lim p_n = +\infty}$

D'autre part, si $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = -\infty$ alors $p_n = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(a_k)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\boxed{(p_n) \text{ converge vers } 0}$

4. a) On a $\lim u_n = 0$ donc $\ln(a_n) = u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + o(u_n^2)$; comme $\sum u_n$ CV, les séries $\sum \ln(a_n)$ et $\sum(\ln(a_n) - u_n)$ sont de même nature. De plus $\ln(a_n) - u_n \sim \frac{-1}{2}u_n^2$ (SATN) donc si $\sum u_n^2$ CV alors $\sum(\ln(a_n) - u_n)$ puis $\sum \ln(a_n)$ CV. On en déduit $\boxed{(p_n) \text{ converge vers } p > 0}$ d'après **II.1**

b) Si par contre $\sum u_n^2$ DV alors $\sum(\ln(a_n)-u_n)$ DV aussi et est une SATN donc $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(\ln(a_k)-u_k)=-\infty$.

Avec la convergence de $\sum u_n$, on en déduit $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln(a_k)=-\infty$ donc, par composition avec la fonction exp, $\boxed{(p_n) \text{ converge vers } 0}$

5. Si $\sum u_n$ est ACV alors $\sum u_n$ CV donc d'après **II.4**, (p_n) converge vers p (nul ou non). De plus $\lim u_n=0$ donc $u_n^2=o(|u_n|)$; on en déduit $\sum u_n^2$ converge donc d'après **II.4.a**, $\boxed{(p_n) \text{ converge vers } p>0}$

6. Si $u_n=\dfrac{\ln(n)}{n^2}$, on a $u_n\geqslant 0$ et $u_n=o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $\sum u_n$ est ACV. D'après **II.3.a**, $\boxed{(p_n) \text{ converge vers } p>0}$

7. a) On commence par justifier l'existence de u_n : la fonction $t\mapsto \dfrac{e^{-t\sqrt{n}}}{1+t^2}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0,+\infty[$, puis $\left|\dfrac{e^{-t\sqrt{n}}}{1+t^2}\right|\leqslant e^{-t\sqrt{n}}$ et $t\mapsto e^{-t\sqrt{n}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\sqrt{n}>0$. On a de plus $|u_n|\leqslant\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}|u_n|=0}$ par encadrement. *Ceci peut aussi se prouver avec le TCD et la domination* $\left|\dfrac{e^{-t\sqrt{n}}}{1+t^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{1+t^2}=\varphi(t)$.

On vérifie alors le CSSA : $|u_{n+1}|-|u_n|=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t\sqrt{n+1}}-e^{-t\sqrt{n}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant 0$ donc $(|u_n|)$ décroît. Le CSSA donne donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

b) $x\mapsto\dfrac{x}{\sqrt{n}}$ est $\mathcal{C}^1$ bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ donc $|u_n|=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+\frac{x^2}{n}}\,\mathrm{d}x$. On calcule alors la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+\frac{x^2}{n}}\,\mathrm{d}x$ par le TCD : on pose $f_n(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+\frac{x^2}{n}}$ et on a

H1 : (f_n) CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers $x\mapsto e^{-x}$

H2 : les f_n et $x\mapsto e^{-x}$ sont $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$.

H3 : $|f_n(x)|\leqslant e^{-x}$ (indép de x) et $x\mapsto e^{-x}$ est $\mathcal{CM}^0$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$

On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+\frac{x^2}{n}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-x}\,\mathrm{d}x=1$ et $\boxed{|u_n|\sim\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$

c) On a donc $\sum u_n$ converge et $u_n^2\sim\dfrac{1}{n}$ (SATP) donc $\sum u_n^2$ diverge. D'après **II.4.b**, $\boxed{(p_n) \text{ converge vers } 0}$

8. a) On trouve $(1+u_{2n-1})(1+u_{2n})=1-\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ puis, en séparant les termes pairs et impairs dans le produit p_{2n},
$p_{2n}=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+u_{2k-1})(1+u_{2k})=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^{3/2}}\right)$.

b) Comme $\sum\dfrac{-1}{k^{3/2}}$ est ACV, le produit $\prod\left(1-\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge vers $p>0$ d'après **II.5** donc (p_{2n}) converge vers $p>0$. Comme $p_{2n+1}=p_{2n}\times\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}p$ aussi donc $\boxed{(p_n) \text{ converge vers } p>0}$

c) On trouve $u_{2n-1}+u_{2n}=\dfrac{1}{n}$ donc, à nouveau en séparant les termes pairs et impairs sur la somme partielle de u_n,
$S_{2n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}u_k=\sum_{k=1}^{n}(u_{2k-1}+u_{2k})=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$. La suite (S_{2n}) DV donc (S_n) aussi et $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$

d) On a vu en **II.4** que lorsque $\sum u_n$ converge, (p_n) convergeait toujours (vers p nul ou non) ; ici on a un exemple de suite (u_n) pour laquelle (p_n) converge (vers $p>0$) mais $\sum u_n$ DV donc $\boxed{\text{la réciproque de } \textbf{II.4} \text{ est fausse}}$

Partie III

1. On a $|p_n|\leqslant\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+|u_k|)=q_n$. On peut alors appliquer les résultats de la partie **II** à la suite <u>réelle</u> (q_n) : la série réelle $\sum|u_n|$ est convergente et à termes positifs donc d'après **II.3.a**, la suite (q_n) converge (vers $q>0$), elle est donc bornée ($q_n\leqslant M$). On a alors $|p_n|\leqslant M$ donc $\boxed{(p_n) \text{ est bornée}}$

2. On a $p_{n+1}-p_n=u_{n+1}p_n$ donc, en conservant les notations précédentes, on a $|p_{n+1}-p_n|\leqslant M|u_{n+1}|$ donc par théorème de comparaison des SATP, la convergence de $\sum|u_n|$ donne la convergence absolue de $\sum(p_{n+1}-p_n)$. Par lien suite/série, on en déduit $\boxed{(p_n) \text{ converge vers } p\in\mathbb{C}}$

3. Comme $a_n \neq 0$, $p_n \neq 0$ et $\dfrac{1}{p_n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_n}$. On introduit alors v_n de sorte que $\dfrac{1}{a_n} = 1+v_n$, ie $v_n = \dfrac{1}{1+u_n} - 1 = \dfrac{-u_n}{1+u_n}$.
Comme $\sum u_n$ est ACV, on a $\lim u_n = 0$ et $v_n \sim -u_n$ donc $|v_n| \sim |u_n|$ (SATP) et $\sum v_n$ est aussi ACV. La question précédente donne la convergence de $\left(\dfrac{1}{p_n}\right)$ donc $\boxed{p \neq 0}$ En effet, si on avait $p = 0$, on aurait $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|p_n|} = +\infty$ ce qui est incohérent avec la convergence de $\left(\dfrac{1}{p_n}\right)$.

4. a) Comme $|z| < 1$, les séries $\sum z^n$ et $\sum z^{2n-1}$ sont ACV donc les produit $\prod(1+z^n)$ et $\prod(1-z^{2n-1})$ convergent et sont non nuls. Par inverse, le produit $\prod \dfrac{1}{1-z^{2n-1}}$ est donc aussi convergent.

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+z^k)\prod_{k=1}^{n}(1-z^k) = \prod_{k=1}^{n}(1-z^{2k})$ (termes pairs) et $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-z^{2k-1})\prod_{k=1}^{n}(1+z^k)\prod_{k=1}^{n}(1-z^k) = \prod_{k=1}^{2n}(1-z^k)}$

c) La convergence de tous les produits ayant été justifiée avant, on peut faire tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité précédente et on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}(1-z^{2k-1})\prod_{k=1}^{+\infty}(1+z^k)\prod_{k=1}^{+\infty}(1-z^k) = \prod_{k=1}^{+\infty}(1-z^k)$. De plus, on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}(1-z^k) \neq 0$ d'après **III.3** donc, après simplification, on obtient $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}(1-z^{2k-1})\prod_{k=1}^{+\infty}(1+z^k) = 1$, ce qui donne bien le résultat avec $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}(1-z^{2k-1}) \neq 0$ à nouveau avec **III.3**.

5. a) $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge et i est une constante donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

b) On a $|a_n| = 1 + \dfrac{1}{n} = \dfrac{n+1}{n}$ donc $|p_n| = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}|a_k| = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. On en déduit $\boxed{(p_n) \text{ diverge}}$ car si (p_n) convergeait vers p alors $(|p_n|)$ convergerait vers $|p|$.

c) Le résultat de **II.4** n'est donc plus valable pour les suites complexes.

Partie IV

1. La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,+\infty[$, puis $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ et $1-x<1$; enfin $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $\boxed{t \mapsto t^{x-1}e^{-t} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ si } x > 0}$

2. La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue, positive et non nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $\boxed{\Gamma(x) > 0}$

3. On définit $f_n(t)$ par $f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in]0,n] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$ de sorte que $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et on applique le TCD :

H1 : pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé et n assez grand, $f_n(t) = t^{x-1}\exp\left[n\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right)\right] \underset{n\to+\infty}{=} t^{x-1}\exp\left[n\left(-\dfrac{t}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right]$ donc $f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} t^{x-1}e^{-t}$ et (f_n) CVS sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$

H2 : les f_n et $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ sont $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

H3 : pour $t \in]0,n[$, on a $|f_n(t)| = t^{x-1}\exp\left[n\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right)\right] \leqslant t^{x-1}\exp\left[n\left(-\dfrac{t}{n}\right)\right] = t^{x-1}e^{-t}$. Si $t > n$ alors $|f_n(t)| = 0 \leqslant t^{x-1}e^{-t}$. On a donc $|f_n(t)| \leqslant t^{x-1}e^{-t} = \varphi(t)$ pour tout $t > 0$. On a vu en **IV.1** que φ est $\mathcal{CM}^0$ et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$

Par TCD, on en déduit $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x) \text{ si } x > 0}$

4. On pose $t = nu$: la fonction $u \mapsto nu$ est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante de $]0,1]$ sur $]0,n]$ et on a $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-u)^n\,(nu)^{x-1} n\,\mathrm{d}u$ donc $\boxed{\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = n^x I_n(x)}$

5. a) On effectue une IPP avec $g(u) = (1-u)^n$ et $h(u) = \dfrac{u^x}{x}$: les fonction g et h sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et $\displaystyle\lim_{u\to0} g(u)h(u) = 0$, car $x > 0$, donc $I_n(x) = \Big[g(u) \times h(u)\Big]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 (-n)(1-u)^{n-1}\frac{u^x}{x}\,du$ donc $\boxed{I_n(x) = \dfrac{n}{x} I_{n-1}(x+1)}$

b) On en déduit par récurrence sur n la valeur $\boxed{I_n(x) = \dfrac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \text{ pour } n \geqslant 0 \text{ et } x > 0}$

6. On a donc $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ et avec **IV.3**, $\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}}$

7. a) On peut commencer par remarquer que si $x \in]0,1[$ alors $1-x>0$ donc $\Gamma(1-x)$ existe aussi. On a de plus, $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \times \frac{n^{1-x}n!}{(1-x)(2-x)\dots(n+1-x)}$. On a de plus

$$\begin{aligned} x(x+1)\dots(x+n)\times(1-x)(2-x)\dots(n+1-x) &= x\times\prod_{k=1}^{n}(k+x)\times\prod_{k=1}^{n}(k-n)\times(n+1-x) \\ &= x\prod_{k=1}^{n}(k^2-x^2)\times(n+1-x) = x\prod_{k=1}^{n}\left[k^2\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\right]\times n\left(1+\frac{1-x}{n}\right) \\ &= n\times(n!)^2\times x\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\times\left(1+\frac{1-x}{n}\right) \end{aligned}$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \times \frac{n^{1-x}n!}{(1-x)(2-x)\dots(n+1-x)} = \frac{1}{x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)}$, ce produit converge vers $p>0$ d'après **II.5** car $\sum \frac{x^2}{n^2}$ est ACV. On a donc $\boxed{\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{1}{x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)} \text{ si } x\in]0,1[}$ ce qui équivaut à la question posée puisque $\Gamma(x)\Gamma(1-x)\neq 0$ d'après **IV.2**

b) Avec $x=\frac{1}{2}\in]0,1[$, on a $\displaystyle\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$ donc, d'après **I.3**, $\displaystyle\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\pi}$ et comme $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)>0$, on conclut $\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$

8. a) Fait en cours

b) On a $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k) = x\prod_{k=1}^{n}k\left(1+\frac{x}{k}\right) = n!x\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)$ et $n^x = e^{x\ln(n)} = e^{x(H_n-\gamma+o(1))} = e^{-\gamma x}\left(\prod_{k=1}^{n}e^{x/n}\right)e^{o(1)}$

donc $\displaystyle\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{e^{o(1)}}{xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{n}e^{x/n}\left(1+\frac{x}{k}\right)}$. Ce produit admet une limite finie non nulle puisque on a vu $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} > 0$ et on a, par unicité de la limite $\boxed{\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{+\infty}e^{-x/n}\left(1+\frac{x}{n}\right)}$