L'usage des calculatrices est interdit

PROBLÈME
(Extrait de CCP PC 2020 et CCP PC 2013 maths 2)

I Calculs préliminaires

L'objectif de cette question est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

et de calculer sa valeur.
On considère la fonction $f : [0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[, \quad f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}.$$

1. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2. En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.

Dans la suite de cette question, on définit la fonction $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

3. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ (sans symbole intégral) pour tout $x \in]0,+\infty[$.

4. Déterminer la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et en déduire

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

On considère les fonctions $F_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $F_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in [0,1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

5. Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0,1]$.

6. On définit la fonction $u : [0,1]\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,t) \in [0,1]\times]0,+\infty[, \quad u(x,t) = -\frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2}e^{-xt}.$$

Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et que :

$$F_2(x) = \frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

7. Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0,1]$.

8. En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I.

II Étude de quelques suites d'intégrales

1. Rappeler avec précision le théorème de convergence dominée.

2. a) On considère ici une application continue $f\colon [0,1] \mapsto \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

b) On suppose ici de plus que $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$. On pourra transformer nI_n grâce à un changement de variable.

c) *Application 1.*

Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$ (grâce à une intégrale).

3. On considère maintenant que $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue sur $\mathbb{R}^+$, telle que $u \mapsto \dfrac{f(u)}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Grâce à un changement de variable approprié, justifier l'existence de $A_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nA_n$ (grâce à une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer).

4. *Application 2.*

a) Justifier que, pour $n \geqslant 2$, $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t^n)}{t^n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, l'existence, pour $n \geqslant 2$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$ et que

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{n-1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t^n)}{t^n}\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$ quand n tend vers $+\infty$, grâce à I calculée dans la partie I.