Correction du DS4

Partie I (Extraite de CCINP PC 2020)

1. $t \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Puis $\lim\limits_{t\to 0} f(x,t) = 1$ donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,1]$. Enfin, si $x>0$, $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et $\boxed{t\mapsto f(x,t) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ si } x>0}$

2. $u : t\mapsto 1-\cos(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{-1}{t}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\lim\limits_{0} u\times v = 0$ (car $1-\cos(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$) et $\lim\limits_{+\infty} u\times v = 0$ donc, par IPP, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, ie $\boxed{I \text{ et } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ sont de même nature}}$

$t\mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\lim\limits_{0} \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $t\mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui donne l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ puis $\boxed{I \text{ existe}}$

3. On applique le théorème de dérivation :
H1 : pour $t>0$, $x\mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
H2 : pour $x>0$, $t\mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{CM}^0$ et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (d'après **I.1.a**)
H3 : pour $x>0$, $t\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)e^{-xt}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
H4 : pour $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$ et $t>0$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |\sin(t)|e^{-xt} \leqslant |\sin(t)|e^{-at} = \varphi(t)$ (indépendante de x). De plus, φ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ car $a>0$ donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On en déduit $\boxed{F\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*}) \text{ et } F'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t}$

On a $\sin(t)e^{-xt} = \mathrm{Im}\left(e^{-(x-i)t}\right)$; $t\mapsto e^{-(x-i)t}$ est $\mathcal{CM}^0$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\left|e^{-(x-i)t}\right| = e^{-xt}$ et $x>0$ donc $F'(x) = -\mathrm{Im}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t}\,\mathrm{d}t\right) = -\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{x-i}\right)$, ce qui donne $\boxed{F'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2} \text{ pour } x>0}$

4. Comme $|\sin(t)|\leqslant|t|$, on a $|f(x,t)|\leqslant e^{-xt}$, donc, comme $t\mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si $x>0$, on a $|F(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}$. On en déduit, par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{+\infty} F = 0}$

La limite de F en $+\infty$ peut aussi se déterminer avec le TCDPC, mais c'est plus long à rédiger.

Avec l'expression de F', on obtient $F(x) = -\arctan(x) + C$, avec $C\in\mathbb{R}$. On a alors $\lim\limits_{+\infty} F = -\dfrac{\pi}{2} + C$ donc $C = \dfrac{\pi}{2}$ et $\boxed{F(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x), \text{ pour } x>0}$

5. On applique cette fois le théorème de continuité :
H1 : pour $t\in]0,1]$, $x\mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$.
H2 : pour $x\in[0,1]$, $t\mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,1]$.
H3 : pour $x\in[0,1]$ et $t\in]0,1]$, $|f(x,t)| = \dfrac{|\sin(t)|}{t}e^{-xt} \leqslant \dfrac{|\sin(t)|}{t} = \varphi_1(t)$ (indépendante de x). De plus φ_1 est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,1]$ et $\lim\limits_{0}\varphi_1 = 1$ donc φ_1 est intégrable sur $]0,1]$.

On en déduit que $\boxed{F_1 \text{ est continue sur } [0,1]}$

6. On commence par vérifier que $t\mapsto u(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sin(t)e^{-xt}$. On fait une IPP : les fonctions $t\mapsto u(x,t)$ et $v : t\mapsto \dfrac{-1}{t}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)\times v(t) = 0$ (même avec $x=0$) donc $F_2(x) = \left[\dfrac{-u(x,t)}{t}\right]_{t=1}^{t=+\infty} + \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$, ce qui donne l'expression demandée pour F_2 et la CV de l'intégrale, mais pas l'intégrabilité de $t\mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$.

Pour $x\in[0,1]$, $t\mapsto\dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[1,+\infty[$ et $\dfrac{u(x,t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ car sin, cos et $t\mapsto e^{-xt}$ sont bornées sur $[1,+\infty[$ (même avec $x=0$). On en déduit $\boxed{t\mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2} \text{ est intégrable sur } [1,+\infty[\text{ si } x\in[0,1]}$

7. $x\mapsto \dfrac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$, il suffit de prouver la continuité sur $[0,1]$ de $x\mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$:

H1 : pour $t \geqslant 1$, $x \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$.

H2 : pour $x \in [0,1]$, $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[1,+\infty[$.

H3 : pour $x \in [0,1]$ et $t \geqslant 1$, $\left|\dfrac{u(x,t)}{t^2}\right| \overset{\text{ineg tr}}{\leqslant} \dfrac{x+1}{x^2+1} \times \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{2}{t^2} = \varphi_2(t)$ (indépendante de x). De plus φ_2 est $\mathcal{CM}^0$ et intégrable sur $[1,+\infty[$.

On en déduit $x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[0,1]$ et, par somme, $\boxed{F_2 \text{ est continue sur } [0,1]}$

8. Par somme de F_1 et F_2, F est continue sur $[0,1]$ donc en 0.

On en déduit $I = F(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ puis $\boxed{I = \dfrac{\pi}{2}}$

Partie II (d'après CCP PC 2013 maths 2)

1. cours !

2. a) On pose $u_n(t) = f(t^n)$ et on applique le théorème de convergence dominée :

H1 : si $t \in [0,1[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} t^n = 0$ et f est continue en 0 donc la suite (u_n) CVS sur $[0,1[$ vers $f(0)$.

H2 : les fonctions u_n et la fonction constante $f(0)$ sont continues par morceaux sur $[0,1[$.

H3 : f est continue donc bornée sur le segment $[0,1]$ donc $|u_n(t)| \leqslant M$; la fonction constante M est continue par morceaux et intégrable sur $[0,1[$.

On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 f(0)\,\mathrm{d}t$ donc $\boxed{\lim I_n = f(0)}$

b) *On peut commencer par remarquer que si $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$ alors $f(0) = 0$ car sinon, on aurait $\dfrac{f(u)}{u} \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{f(0)}{u}$, qui ne serait pas intégrable sur $]0,1]$. La suite (I_n) tend donc vers 0.*

On pose $t = u^{1/n}$, la fonction $u \mapsto u^{1/n}$ est $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0,1]$ sur $]0,1]$, donc $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u} u^{1/n}\,\mathrm{d}u$ donc on réapplique le théorème de convergence dominée avec $v_n(u) = \dfrac{f(u)}{u}u^{1/n}$:

H1 : si $u \in]0,1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u^{1/n} = 1$ donc la suite (v_n) converge simplement sur $]0,1]$ vers $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$.

H2 : les fonctions v_n et la fonction $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ sont continues par morceaux sur $]0,1]$.

H3 : $|v_n(u)| \leqslant \dfrac{|f(u)|}{u}$ et $u \mapsto \dfrac{|f(u)|}{u}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$.

On en déduit $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u}$

c) On applique ce qui vient d'être fait à la fonction sin : sin est continue sur $[0,1]$ et $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ donc $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$; on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u > 0$ car $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ est continue positive et non nulle sur $]0,1]$. On a donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u}$

3. a) On pose $u = t^n$ (que l'on a déjà justifié), on en déduit que l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t^n)\,\mathrm{d}t$ équivaut à celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(u)u^{1/n-1}\,\mathrm{d}u$. Comme pour $u \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$, on a $|f(u)u^{1/n-1}| \leqslant \dfrac{|f(u)|}{\sqrt{u}}$, l'intégrabilité de $u \mapsto \dfrac{f(u)}{\sqrt{u}}$ sur $[1,+\infty[$ implique celle de $u \mapsto f(u)u^{1/n-1}$ donc l'existence de A_n et on a $\boxed{A_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u}u^{1/n}\,\mathrm{d}u}$

b) On applique à nouveau le théorème de convergence dominée à la suite (v_n) sur $[1,+\infty[$:

H1 : si $u \geqslant 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u^{1/n} = 1$ donc la suite (v_n) converge simplement sur $[1,+\infty[$ vers $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$.

H2 : les fonctions v_n et la fonction $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ sont continues sur $[1,+\infty[$.

H3 : si $u \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$, $|v_n(u)| \leqslant \dfrac{|f(u)|}{\sqrt{u}}$ et $u \mapsto \dfrac{|f(u)|}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

On en déduit $\boxed{\displaystyle\lim nA_n = \int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u}$

4. a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t^n)}{t^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\cos(t^n)}{t^n} = 0$ et $\left|\dfrac{1-\cos(t^n)}{t^n}\right| \leqslant \dfrac{2}{t^n}$ donc, si $n \geqslant 2$, $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t^n)}{t^n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On effectue alors une IPP : $t \mapsto (1-\cos(t^n))$ et $t \mapsto \dfrac{t^{1-n}}{1-n}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\cos(t^n)}{t^{n-1}} = 0$ car $\cos(t^n) \underset{t\to 0}{=} 1 - \dfrac{t^{2n}}{2} + o(t^{2n})$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1-\cos(t^n)}{t^{n-1}} = 0$ (car $n \geqslant 2$) . On en déduit l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t^n)}{t^n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos(t^n)}{(1-n)t^{n-1}}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{nt^{n-1}\sin(t^n)}{(1-n)t^{n-1}}\,\mathrm{d}t$ donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{n-1}{n}\int_0^{1} \frac{1-\cos(t^n)}{t^n}\,\mathrm{d}t}$

b) On applique ce qui a été fait avant pour les suites (I_n) et (A_n) à la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$, $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme vu en **I.2**. On déduit, en ajoutant I_n et A_n, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = I \neq 0$, donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}}$