Correction du DS4/5

Exercice 2 : (inspiré de E3A PC 2016 maths 1)

Partie I

1. a) Comme il faut au moins 3 lancers pour que ces événements puissent se produire, ces 8 événements sont tous impossibles.

b) $\boxed{X_k = P_{k-2} \cap P_{k-1} \cap F_k \text{ et } Y_k = F_{k-2} \cap P_{k-1} \cap P_k}$ sont des intersections d'événements donc sont des événements. De même $\boxed{U_k = \bigcup_{i=1}^{k} X_i \text{ et } V_k = \bigcup_{i=1}^{k} Y_i}$ sont des réunions d'événements donc sont des événements.

c) Par indépendance des (P_i), on a $\boxed{P(X_k) = P(Y_k) = p^2 q}$

2. a) $\boxed{u_1 = v_1 = u_2 = v_2 = 0}$ puisque les événements sont impossibles.

b) On a vu $U_3 = \bigcup_{i=1}^{3} X_i = X_3$ puisque $X_1 = X_2 = \emptyset$ donc $\boxed{u_3 = v_3 = p^2 q}$ (même raisonnement pour V_3).

c) $X_k \cap X_{k+1} = \emptyset$ car on ne peut pas faire « face » au lancer k (pour X_k) et « pile » au même lancer (pour X_{k+1}) ; de même $X_k \cap X_{k+2} = \emptyset$ (incohérence au lancer k) et $X_{k+1} \cap X_{k+2} = \emptyset$ (incohérence au lancer $k+1$).
On a donc $U_4 = X_3 \cup X_4$ et par incompatibilité, $u_4 = P(X_3) + P(X_4)$ puis $\boxed{u_4 = v_4 = 2p^2 q}$ (même raisonnement pour v_4)
Comme $U_5 = X_3 \cup X_4 \cup X_5$, on a encore $\boxed{u_5 = v_5 = 3p^2 q}$
On peut remarquer que la situation se complique ensuite puisque $U_6 = X_3 \cup X_4 \cup X_5 \cup X_6$ mais X_3 et X_6 ne sont plus incompatibles.

3. a) $U_{n+2} \cap X_{n+3} = (U_n \cap X_{n+1} \cap X_{n+2}) \cap X_{n+3} = U_n \cap X_{n+3}$ car $X_{n+3} \cap X_{n+1} = X_{n+3} \cap X_{n+2} = \emptyset$. Puis $P_{X_{n+3}}(U_n) = \dfrac{P(U_{n+2} \cap X_{n+3})}{P(X_{n+3})} = \dfrac{P(U_n \cap X_{n+3})}{P(X_{n+3})}$ donc $\boxed{P_{X_{n+3}}(U_n) = P_{X_{n+3}}(U_{n+2})}$

b) On a $U_{n+3} = U_{n+2} \cup X_{n+3}$ donc $u_{n+3} = u_{n+2} + p^2 q - P(U_{n+2} \cap X_{n+3})$; par définition (ou probabilités composées), on a $P(U_{n+2} \cap X_{n+3}) = P_{X_{n+3}}(U_{n+2}) P(X_{n+3})$ donc avec l'indépendance admise et la question précédente, on a $P(U_{n+2} \cap X_{n+3}) = P(U_n) P(X_{n+3}) = p^2 q u_n$. En reportant, on obtient $\boxed{u_{n+3} = u_{n+2} + p^2 q (1 - u_n)}$

4. a) Par récurrence (triple), on justifie $u_n = v_n$: pour $n = 1, 2, 3$ c'est vrai et si on suppose $u_n = v_n$, $u_{n+1} = v_{n+1}$ et $u_{n+2} = v_{n+2}$, les relations de récurrence identiques des suites (u_n) et (v_n) vont donner $u_{n+3} = v_{n+3}$ donc $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}}$

b) On a $U = \bigcup_{n \geqslant 1} U_n$ donc est un événement et par continuité croissante ($U_n \subset U_{n+1} = U_n \cup X_{n+1}$), on a $P(U) = \lim_{n \to +\infty} u_n$ (ce qui justifie que la suite converge). On peut aussi prouver directement la convergence de la suite (u_n) : comme $u_{n+3} - u_{n+2} = p^2 q (1 - u_n) \geqslant 0$ ($u_n \in [0, 1]$ est une probabilité) donc (u_n) est croissante, majorée par 1 donc converge vers $\ell \in [0, 1]$. En passant à la limite dans la relation de récurrence vérifiée par (u_n), on obtient $\ell = \ell + p^2 q (1 - \ell)$, ce qui donne $\ell = 1$ puisque $p^2 q \neq 0$. On a donc $\lim u_n = 1$ et $\boxed{P(U) = P(V) = 1}$

Partie II

1. $\boxed{A_m = \bigcap_{i=1}^{m-1} (\overline{U_i} \cap \overline{V_i}) \cap U_m,\ B_m = \bigcap_{i=1}^{m-1} (\overline{U_i} \cap \overline{V_i}) \cap V_m,\ A = \bigcup_{m \geqslant 1} A_m \text{ et } B = \bigcup_{m \geqslant 1} B_m}$ sont tous des événements.

2. a) On a bien $P_1 \cap \cdots \cap P_{m-1} \cap F_m \subset A_m$. Réciproquement, si Ambre gagne au rang m les 3 derniers lancers sont PPF ; si on suppose qu'un lancer a donné « face » avant le rang m, c'est donc à un rang $n \leqslant m - 3$. Si on note k le rang du dernier « face » apparu avant le rang $m - 3$ (qui existe donc), les tirages entre les rangs k et m sont $F\underbrace{P \ldots P}_{m-k-1}F$ donc comme $m - k - 1 \geqslant 2$, Bader aurait gagné au rang $k + 2$. On a donc $\boxed{A_m = P_1 \cap \cdots \cap P_{m-1} \cap F_m}$

b) Par indépendance des P_i, on a $\boxed{P(A_m) = p^{m-1} q}$ et par incompatibilité 2 à 2 des A_m, on en déduit cette fois $P(A) = \sum_{m=1}^{+\infty} P(A_m) = q \sum_{m=3}^{+\infty} p^{m-1}$ et $\boxed{P(A) = p^2}$

3. a) Comme $A \cup B = U \cup V$, on a $P(A \cup B) = P(U \cup V) \geqslant P(U) = 1$ puis $\boxed{P(A \cup B) = 1}$

b) A et B étant incompatible, on a $\boxed{P(B) = 1 - p^2}$

4. $\boxed{P(A) = \dfrac{1}{4} \text{ et } P(B) = \dfrac{3}{4}}$ *C'est là qu'est le paradoxe : même si les probabilités d'apparition des motifs PPF et FPP sont identiques, Bader a trois fois plus de chances de gagner qu'Ambre.*

5. Il faut et il suffit que $p^2 = 1 - p^2$ donc $\boxed{\text{le jeu est équitable si et seulement si } p = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

PROBLEME : (Inspiré de CCP MP 2012 maths 2)

Partie I

1. Pour $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a $\phi_A(\alpha M + \beta N) = A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)A = \alpha\phi_A(M) + \beta\phi_A(N)$ donc $\boxed{\phi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$

De plus $\phi_A(I_n) = A - A = 0$ et $\phi_A(A) = A^2 - A^2 = 0$ donc $\boxed{(I_n, A) \in (\ker \phi_A)^2}$

2. a) $\begin{cases} \phi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = -bE_{1,2} + cE_{2,1} \text{ et de même,} \\ \phi_A(E_{1,2}) = -cE_{1,1} + (a-d)E_{1,2} + cE_{2,2} \\ \phi_A(E_{2,1}) = bE_{1,1} + (d-a)E_{2,1} - bE_{2,2} \text{ et} \\ \phi_A(E_{2,2}) = bE_{1,2} - cE_{2,1} \end{cases}$ donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\phi_A) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}}$

b) ϕ_A est nulle si et seulement si $b = c = 0$ et $a = d$ donc $\boxed{\text{si et seulement si } A \text{ est une matrice scalaire}}$

c) On a $\mathcal{X}_A = X^2 - (a+d)X + ad - bc$ donc $\mathcal{X}_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\Delta = (a-d)^2 + 4bc \geqslant 0$. Si $\Delta < 0$ alors A n'est donc pas diagonalisable. Si $\Delta > 0$, $\mathcal{X}_A$ admet 2 racines simples donc A est diagonalisable et si $\Delta = 0$ alors A admet une valeur propre double λ donc A n'est pas diagonalisable (car sinon elle serait semblable à λI_2 donc on aurait $A = \lambda I_2$). On en déduit que $\boxed{A \text{ est diagonalisable si et seulement si } (a-d)^2 + 4bc > 0}$

d) La factorisation de $\mathcal{X}_{\phi_A}$ étant donnée, il suffit de développer « bêtement » le déterminant et de vérifier qu'il se factorise ainsi.

e) Si $(d-a)^2 + 4bc > 0$ alors ϕ_A admet 2 valeurs propres simples $\pm\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}$ et une valeur propre double 0 ; de plus, (I_2, A) est libre (car $A \neq \lambda I_2$) de $\ker(\phi_A)$ donc $\dim E_0(\phi_A) \geqslant 2 = m_0(\phi_A)$ et ϕ_A est diagonalisable.
On peut aussi utiliser la matrice : on a $\mathrm{rg}(\phi_A) \leqslant 2$ *car* $C_1 + C_2 = 0$ *et* $bC_3 + cC_4 = (a-d)C_2$ *donc on en déduit* $\dim(E_0(\phi_A)) \geqslant 2 = m_0(\phi_A)$.
Réciproquement, si ϕ_A est diagonalisable alors $\mathcal{X}_{\phi_A}$ est scindé sur $\mathbb{R}$, ie $(a-d)^2 + 4bc \geqslant 0$. Si $(a-d)^2 + 4bc = 0$ alors $\mathrm{Sp}(\phi_A) = \{0\}$ donc ϕ_A n'est pas diagonalisable (sinon la matrice de ϕ_A dans une base de vecteurs propres serait nulle donc on aurait $\phi_A = 0$). ϕ_A est donc diagonalisable si et seulement si $(a-d)^2 + 4bc > 0$. On a donc bien l'équivalence $\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable si et seulement si } A \text{ est diagonalisable}}$

3. a) Compte tenu de $A^2 = A$, on a $\phi_A^2(M) = A(AM - MA) - (AM - MA)A = AM - 2AMA + MA$ puis $\phi_A^3(M) = A(AM - 2AMA + MA) - (AM - 2AMA + MA)A = AM - 2AMA + AMA - AMA + 2AMA - MA$ donc $\phi_A^3(M) = \phi_A(M)$; ceci étant valable pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $\phi_A^3 = \phi_A$, ie $\boxed{X^3 - X \text{ annule } \phi_A}$

b) On a $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ donc $\boxed{\mathrm{Sp}(\phi_A) \subset \{-1, 0, 1\}}$

c) $X^3 - X$ est donc scindé à racines simples et annule ϕ_A donc $\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable}}$ De plus, on a vu que $\phi_A(I_n) = 0$ (et $I_n \neq 0$) donc $\boxed{0 \in \mathrm{Sp}(\phi_A)}$

d) $X^2 - X = X(X-1)$ annule A et est scindé à racines simples donc A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 1\}$. il existe donc $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $r = 0$ si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ et $r = n$ si $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. Si $r = 0$ alors A est semblable à la matrice nulle donc $A = 0$; de même, si $r = n$ alors A est semblable à la matrice I_n donc $A = I_n$. Ainsi, si on suppose $A \neq 0$ et $A \neq I_n$, on a $r \in [\![1, n-1]\!]$.

e) On vérifie $AM = M$ et $MA = 0$ puis $\boxed{\phi_A(M) = M}$

f) En choisissant une matrice $B \neq 0$ (ce qui est possible car $r \neq 0$ et $r \neq n$), on a une matrice M non nulle (car P est inversible) telle que $\phi_A(M) = M$ et $1 \in \mathrm{Sp}(\phi_A)$.
Si on reprend le même raisonnement avec $M = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$, on trouve cette fois $\phi_A(M) = -M$ et en choisissant $B \neq 0$, on aura $M \neq 0$ donc $-1 \in \mathrm{Sp}(\phi_A)$. Avec l'inclsuion inverse déjà justifiée, on a $\boxed{\mathrm{Sp}(\phi_A) = \{-1, 0, 1\}}$

Partie II

Le fait que les polynômes caractéristiques de ϕ_A *et* $\widetilde{\phi}_A$ *soient égaux vient du fait que comme* $\phi_A(E_{i,j}) = \widetilde{\phi}_A(E_{i,j})$, *la matrice de* ϕ_A *dans la base canonique de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et celle de* $\widetilde{\phi}_A$ *dans la base canonique de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *sont égales.*

4. a) On a $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^T)$ donc β est aussi une valeur propre de A^T et $\boxed{\exists Y \neq 0, A^T Y = \beta Y}$

b) On a $\widetilde{\phi}_A(XY^T) = AXY^T - XY^TA = \alpha XY^T - X(A^TY)^T = \alpha XY^T - X(\beta Y)^T = (\alpha-\beta)XY^T$. De plus, si $X=(x_i)$, les colonnes de XY^T sont $C_j = x_jY$ et comme $X \neq 0$, un des x_j au moins est non nul, de même $Y \neq 0$ donc une des colonnes de XY^T est non nulle et $XY^T \neq 0$. On en déduit $\boxed{\alpha - \beta \in \mathrm{Sp}(\phi_A) = \mathrm{Sp}(\widetilde{\phi}_A)}$

c) Si ϕ_A est trigonalisable alors $\mathcal{X}_{\phi_A}$ est scindé sur $\mathbb{R}$ donc toutes les valeurs propres de $\widetilde{\phi}_A$ sont réelles. Si α est une valeur propre complexe de A, comme A est réelle, $\beta = \overline{\alpha}$ est aussi une valeur propre de A. D'après la question précédente, $\alpha - \overline{\alpha} = 2i\,\mathrm{Im}(\alpha)$ est alors une valeur propre de $\widetilde{\phi}_A$, ce qui impose $\mathrm{Im}(\alpha) = 0$ et donc $\alpha \in \mathbb{R}$. Toutes les valeurs propres α de A sont donc réelles, $\mathcal{X}_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{A \text{ est trigonalisable si } \phi_A \text{ est trigonalisable}}$

5. a) Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$: $A^0M = I_nM = M$ et $M(A+\lambda I_n)^0 = MI_n = M$ donc $A^0M = M(A+\lambda I_n)^0$; si on suppose $A^kM = M(A+\lambda I_n)^k$ alors $A^{k+1}M = A(A^kM) \overset{\text{HR}}{=} AM(A+\lambda I_n)^k$ et comme $\widetilde{\phi}_A(M) = \lambda M$, on a $AM = MA + \lambda M = M(A+\lambda I_n)$ et on conclut $A^{k+1}M = M(A+\lambda I_n)^{k+1}$

b) On pose $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_kX^k$ et on a $P(A)M = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_kA^kM = \sum_{k=0}^{d} a_kM(A+\lambda I_n)^k = MP(A+\lambda I_n)$. En choisissant $P = \mathcal{X}_A$, avec le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\mathcal{X}_A(A)M = 0$ donc $M\mathcal{X}_A(A+\lambda I_n) = 0$ et comme $M \neq 0$, on en déduit $\boxed{\mathcal{X}_A(A+\lambda I_n) \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})}$

c) On a $\det[\mathcal{X}_A(A+\lambda I_n)] = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \det(A+\lambda I_n - \alpha_i I_n) = \prod_{i=1}^{n} (-1)^n \mathcal{X}_A(\lambda - \alpha_i)$. Comme $\mathcal{X}_A(A+\lambda I_n)$ n'est pas inversible, il existe un indice $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\mathcal{X}_A(\lambda-\alpha_i) = 0$, ie $\lambda - \alpha_i$ est une des valeurs propres de A et il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $\lambda - \alpha_i = \alpha_j$. Ainsi, on a $\boxed{\lambda = \alpha_i - \alpha_j}$

d) Si A est trigonalisable alors les α_i sont tous réels puis $\lambda = \alpha_i - \alpha_j$ est aussi réel ; toutes les valeurs propres de $\widetilde{\phi}_A$ sont réelles donc $\mathcal{X}_{\phi_A}$ est scindé sur $\mathbb{R}$. On en déduit $\boxed{\phi_A \text{ est trigonalisable si } A \text{ est trigonalisable}}$

Partie III

9. a) On a $D = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{k,k}$ donc $DE_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{k,k}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_{k,i} E_{k,j} = \lambda_i E_{i,j}$ et de même, on a $E_{i,j}D = \lambda_j E_{i,j}$ donc $\boxed{DE_{i,j} - E_{i,j}D = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}}$

b) On a $A = PDP^{-1}$ donc $\phi_A(B_{i,j}) = P\left(DE_{i,j} - E_{,j}D\right)P^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j)B_{i,j}$; de plus P étant inversible et $E_{i,j} \neq 0$, on a $B_{i,j} \neq 0$, ie $\boxed{B_{i,j} \text{ est un vecteur propre de } \phi_A \text{ associé à } \lambda_i - \lambda_j}$

c) Les matrices $(B_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: l'application $\psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto PMP^{-1}$ est un isomorphisme donc transforme la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en $(B_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ qui est aussi une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit qu'il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de ϕ_A donc $\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable}}$

10. a) On a $AP_{i,j} - P_{i,j}A = \lambda_{i,j}P_{i,j}$ donc $AP_{i,j}X = (P_{i,j}A + \lambda_{i,j}P_{i,j})X = (\lambda + \lambda_{i,j})P_{i,j}X$: $\boxed{\mu_{i,j} = \lambda + \lambda_{i,j}}$

b) Si $Y \in \mathbb{R}^n$ alors il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Y = MX$ car $X \neq 0$ peut être complété en $(X, X_2, \ldots, X_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et il existe une (unique) matrice telle que $MX = Y$ et $MX_i = 0$ pour $i \geqslant 2$ (par exemple). Puis $(P_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc on peut écrire $M = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_{i,j}P_{i,j}$, ce qui donne $Y = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_{i,j}P_{i,j}X$. La famille $(P_{i,j}X)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est donc génératrice de $\mathbb{R}^n$, on peut en extraire une base de $\mathbb{R}^n$ qui sera formée de vecteurs propres de A puisque tous les $P_{i,j}X$ sont eux-mêmes des vecteurs propres de A. Ainsi, $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$

Partie IV

11. a) La famille $(I_n, A, \ldots, A^m)$ est une famille de $m+1$ vecteurs de $\mathbb{R}[A]$, qui est de dimension m donc cette famille est liée ; il existe donc des scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$, non tous nuls, tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_iA^i = 0$; le polynôme

$$\boxed{P = \sum_{i=0}^{m} \alpha_iX^i \text{ est annulateur de } A}$$

b) Si $B = Q(A) \in \mathbb{R}[A]$, par division euclidienne, il existe $Q_1, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q = PQ_1 + R$ et $\deg(R) \leqslant d-1$; on a alors $B = Q(A) = P(A)Q_1(A) + R(A) = R(A)$. Comme $\deg(R) \leqslant d-1$, $R(A) \in \mathrm{Vect}\{I_n, A, \ldots, A^{d-1}\}$ puis $\mathbb{R}[A] \subset \mathrm{Vect}\{I_n, A, \ldots, A^{d-1}\}$. L'inclusion inverse étant évidente, on a $\boxed{\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}\{I_n, A, \ldots, A^{d-1}\}}$

c) Avec $m = \dim(\mathbb{R}[A])$, on en déduit $m \leqslant d$ puis $m = d$ vu l'inégalité initiale vérifiée par d. La famille $(I_n, A, \ldots, A^{m-1})$ est donc génératrice de $\mathbb{R}[A]$, constituée de $m = \dim(\mathbb{R}[A])$ vecteurs donc $\boxed{(I_n, A, \ldots, A^{m-1})}$ $\boxed{\text{est une base de } \mathbb{R}[A]}$

12. On a $\phi_A\left(A^k\right)=0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ donc $\boxed{\mathbb{R}[A]\subset\ker(\phi_A) \text{ et } \dim(\ker(\phi_A))\geqslant m}$

13. a) Si v commute avec u alors $E_{\lambda_k}(u)$ est stable par v. Réciproquement, si tous les espaces propres de u sont stables par v alors pour $x\in E_{\lambda_k}(u)$, on a $v(x)\in E_{\lambda_k}(u)$ donc $u\circ v(x)=\lambda_k v(x)=v(\lambda_k x)=v\circ u(x)$ donc $u\circ v$ et $v\circ u$ coïncident sur chaque $E_{\lambda_k}(u)$ donc sur $\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p}E_{\lambda_k}(u)=E$.

On en déduit $\boxed{u \text{ et } v \text{ commutent si et seulement si les } E_{\lambda_k}(u) \text{ sont stables par } v}$

b) On en déduit $B\in\ker(\phi_A)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est diagonale par blocs si $\mathcal{B}$ est une base adaptée à la décomposition $E=\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p}E_{\lambda_k}(u)$.

c) On vient de prouver que $(B_1,\ldots,B_p)\mapsto\mathrm{diag}(B_1,\ldots,B_p)$ est un isomorphisme de $\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})$ sur l'ensemble $\{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v), v\in\ker(\phi_A)\}$ si $\mathcal{B}$ est une base adaptée à la décomposition $E=\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p}E_{\lambda_k}(u)$ (*ie l'ensemble des matrices des endomorphismes de* $\ker(\phi_A)$). On en déduit $\dim(\ker(\phi_A))=\dim\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})\right)=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\dim(\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R}))$ puis

$$\boxed{\dim(\ker(\phi_A))=\sum_{k=1}^{p}m_k^2}$$

d) On a toujours $1\leqslant p\leqslant n$ et $n=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}m_k$ car u est diagonalisable. On calcule alors $\dim(\ker(\phi_A))$ en fonctions des valeurs de p (l'ordre des valeurs propres n'a pas d'influence sur la valeur de $\dim(\ker(\phi_A))$) :

p (nb de vp)	mult resp (m_k)	$\dim(\ker(\phi_A))$
1	5	25
2	1,4	17
	2,3	13
3	1,1,3	11
	1,2,2	9
4	1,1,1,2	7
5	1,1,1,1,1	5

14. a) Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i=0$ ie $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u^{n-i}(y)=0$, on montre par récurrence sur $i\in[\![0,n-1]\!]$ que $\alpha_{n-i}=0$: en composant l'égalité par u^{n-1}, on a $\alpha_n u^{n-1}(y)=0$ donc $\alpha_n=0$ car $u^{n-1}(y)\neq 0$. Si on suppose $\alpha_n=\cdots=\alpha_{n-i}=0$ alors il reste $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-i-1}\alpha_k u^{n-k}(y)=0$ et en composant par u^{n-i-2}, il reste $\alpha_{n-i-1}u^{n-1}(y)=0$ donc $\alpha_{n-(i+1)}=0$. On en déduit que $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ donc $\boxed{(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ est une base de } \mathbb{R}^n}$

b) Soit $w=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u^{n-i}$; on montre que $v=w$ en montrant que ces endomorphismes coïncident sur la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$: comme $B\in\ker(\phi_A)$, on a $v\circ u=u\circ v$ et $v(e_k)=v\circ u^{n-k}(y)=u^{n-k}\circ v(y)$. De même, $w\in\mathbb{R}[u]$ donc u et w commutent, ce qui donne $w(e_k)=w\circ u^{n-k}(y)=u^{n-k}\circ w(y)$ et comme on a $v(y)=w(y)$, on a bien $v(e_k)=w(e_k)$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$. On en déduit $\boxed{v=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u^{n-k}}$

c) On vient de montrer que si $B\in\ker(\phi_A))$ alors $B\in\mathrm{Vect}\left\{I_n,A,\ldots,A^{n-1}\right\}$. L'inclusion inverse a déjà été prouvée au **IV.9** donc $\boxed{\ker(\phi_A)=\mathbb{R}[A]=\mathrm{Vect}\left\{I_n,\ldots,A^{n-1}\right\} \text{ et } n=m}$

Partie V

15. a) On montre le résultat par récurrence sur k : on a $\phi_A(I_n)=0=\alpha\times 0B^0$. Si on suppose $\phi_A\left(B^k\right)=\alpha kB^k$ alors $\phi_A\left(B^{k+1}\right)=\phi_A\left(B^k\right)B+B^k\phi_A(B)\overset{HR}{=}k\alpha B^k+B^k\alpha B=(k+1)\alpha B^k$ donc $\boxed{\forall k\in\mathbb{N}, \phi_A\left(B^k\right)=k\alpha B^k}$

b) Si $B^k\neq 0$ alors $k\alpha$ est une valeur propre de ϕ_A donc si on avait $B^k\neq 0$ pour tout k, alors on aurait $\{k\alpha, k\in\mathbb{N}\}\subset\mathrm{Sp}(\phi_A)$. Comme $\alpha\neq 0$, les $k\alpha$ sont deux à deux distincts ; ϕ_A possèderait une infinité de valeurs propres, ce qui est absurde en dimension finie. On a donc $B^k=0$ pour un certain entier k et $\boxed{B \text{ est nilpotente}}$