Correction du DS6

Exercice : (inspiré de Centrale PSI 2013 maths 2)

1. Fait en cours avec les coefficients.
On peut aussi utiliser $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty \times \|B\|_\infty$ si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis
$\|A_kB_k - L_AL_B\|_\infty = \|A_k(B_k - L_B) + (A_k - L_A)L_B\|_\infty \leqslant n\|A_k\|_\infty \times \|B_k - L_B\|_\infty + n\|A_k - L_A\|_\infty \times \|L_B\|_\infty$ qui tend vers 0 car (A_k) converge donc est une suite bornée.

2. a) On vérifie $\mathcal{X}_A = (X-1)(X-2)^2$ donc A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_2(A)) = 2$ donc si et seulement si $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 1$. On a alors $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $C_1 = C_2$ et $C_3 = 0$ donc, par le théorème du rang, $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 1$ et $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$

b) Comme A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$, le polynôme $P = (X-1)(X-2)$ annule A. La division euclidienne de $\left(1 + \frac{1}{n}X\right)^n$ par P donne $\left(1 + \frac{1}{n}X\right)^n = PQ_n + \alpha_n + \beta_n X$; puis en évaluant en 1 et 2, on obtient

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \alpha_n + \beta_n \\ \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \alpha_n + 2\beta_n \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \beta_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ \alpha_n = 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \end{cases}}$$

On a alors $\left(I_3 + \frac{1}{n}A\right)^n = \alpha_n I_3 + \beta_n A$.

c) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 2e - e^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = e^2 - e$ donc $\boxed{E(A) \text{ existe et } E(A) = \left(2e - e^2\right) I_3 + \left(e^2 - e\right) A = Q(A)}$ avec $Q = \left(2e - e^2\right) + \left(e^2 - e\right) X$.

3. a) Si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ alors $\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^n = \mathrm{diag}\left(\left(1 + \frac{\lambda_1}{n}\right)^n, \dots, \left(1 + \frac{\lambda_p}{n}\right)^n\right)$; on en déduit, grâce au préliminaire, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^n = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p}\right)$ donc $\boxed{E(D) \text{ existe}}$
Comme $E(D)$ est diagonale, on a $\det(E(D)) = e^{\lambda_1} \times \cdots \times e^{\lambda_p} = e^{\mathrm{Tr}(D)} \neq 0$ donc $\boxed{E(D) \text{ est inversible}}$

b) i. On a $A = PDP^{-1}$ puis $\left(I_p + \frac{1}{n}A\right) = P\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^n P^{-1}$, donc, avec **1**, $\boxed{E(A) = PE(D)P^{-1} \text{ existe}}$

ii. $E(A)$ et $E(D)$ sont semblables donc $\det(E(A)) = \det(E(D))$, puis $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D)$; on a vu à la question **3.a** que si D est diagonale, on a $\det(E(D)) = e^{\mathrm{Tr}(D)}$ donc $\boxed{\det(E(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)}}$

iii. On a $xI_p + A = P(xI_p + D)P^{-1}$ et $xI_p + D$ est diagonale donc $E(xI_p + A)$ existe et $E(xI_p + A) = PE(xI_p + D)P^{-1}$ puis $E(xI_p + A) = PE(xI_p)E(D)P^{-1} = Pe^x I_p E(D)P^{-1}$ donc $\boxed{E(xI_p + A) = e^x E(A)}$

4. a) I_p et A commutent donc $\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} A^j$ donc, si $n \geqslant p$, $\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n = \sum\limits_{j=0}^{p-1} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} A^j$; il s'agit d'une somme <u>finie</u> de suites. Pour chaque terme : $\frac{1}{n^j}\binom{n}{j} = \frac{1}{j!} \times \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{n^j} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{j!}$ car les j (fixé) termes du numérateur sont équivalent à n. On en déduit $\boxed{E(A) = \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant p-1} \frac{1}{j!} A^j}$

b) Comme $AB = BA$, $\frac{1}{n}A$ et $I_p + \frac{1}{n}B$ commutent ; on a $\left(I_p + \frac{1}{n}(A+B)\right)^n = \left(\left(I_p + \frac{1}{n}B\right) + \frac{1}{n}A\right)^n$ donc, pour $n \geqslant p$, $\left(I_p + \frac{1}{n}(A+B)\right)^n = \sum\limits_{j=0}^{p-1} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} A^j \times \left(I_p + \frac{1}{n}B\right)^{n-j}$. Il s'agit à nouveau d'une somme finie, le résultat admis par l'énoncé est aussi valable pour $i = 0$ puisque c'est la définition de $E(B)$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} = \frac{1}{j!}$ donc, comme $X \mapsto A^j X$ est linéaire donc continue, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} A^j \times \left(I_p + \frac{1}{n}B\right)^{n-j} = \frac{1}{j!} A^j E(B)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}(A+B)\right)^n = \sum\limits_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} A^j E(B) = E(A)E(B)$, c'est-à-dire $\boxed{E(A)E(B) = E(A+B)}$

c) A et xI_p commutent, $E(xI_p) = e^x I_p$ existe donc $E(xI_p + A) = E(xI_p)E(A)$ puis $\boxed{E(xI_p + A) = e^x E(A)}$

d) On remarque que $E(A)-I_p=\displaystyle\sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{j!}A^j$ peut se factoriser en $E(A)-I_p=AM$ avec $M\in\mathbb{K}[A]$ donc $AM=MA$.

On alors $(E(A)-I_p)^k=A^kM^k=0$ donc $\boxed{E(A)-I_p \text{ est nilpotente}}$

PROBLÈME : (inspiré CCP PC 2011 maths 2)

Partie I

1. $v_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}$ (SATP) donc $\boxed{\sum v_n(x) \text{ CV pour tout } x\in\mathbb{R}}$

2. On applique le théorème de dérivation :
H1 : les fonctions v_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
H2 : $\sum v_n$ CVS sur $\mathbb{R}$ d'après **1**.
H3 : $v_n'(x)=\dfrac{2x}{x^2+n^2\pi^2}$ donc si $[-a,a]\subset\mathbb{R}$ et $x\in[-a,a]$, on a $|v_n(x)|=\dfrac{2x}{x^2+n^2\pi^2}\leqslant\dfrac{a^2}{n^2\pi^2}$ (indépendant de x)

donc $\|v_n'\|_{\infty,[-a,a]}\leqslant\dfrac{a^2}{n^2\pi^2}$ donc $\sum v_n'$ CVNTS de $\mathbb{R}$.

On en déduit $\boxed{V\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ et } V'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2+n^2\pi^2}=U(x)}$

3. a) On a $u_n(n\pi)=\dfrac{1}{n\pi}$ donc $\|u_n\|_\infty\geqslant\dfrac{1}{n\pi}$ et $\boxed{\sum u_n \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}}$

b) On pose $\varphi(t)=\dfrac{2x}{x^2+t^2\pi^2}$ pour $x\in\mathbb{R}^{*+}$ fixé ; la fonction φ est $\mathcal{CM}^0$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$ donc pour tout $k\geqslant 0$, on a $u_{k+1}(x)\leqslant\displaystyle\int_k^{k+1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\leqslant u_k(x)$ puis, pour $k\geqslant 1$, $\displaystyle\int_k^{k+1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\leqslant u_k(x)\leqslant\int_{k-1}^{k}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\varphi(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{2x}{\pi^2t^2}$ donc, en sommant les inégalités précédentes pour $k\geqslant 1$, on obtient l'encadrement, valable pour $x>0$

$$\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\leqslant U(x)\leqslant\int_0^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

donc $\dfrac{2}{\pi}\left[\arctan\left(\dfrac{\pi t}{x}\right)\right]_{t=1}^{t=+\infty}\leqslant U(x)\leqslant\dfrac{2}{\pi}\left[\arctan\left(\dfrac{\pi t}{x}\right)\right]_{t=0}^{t=+\infty}$ puis $\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{\pi}{x}\right)\leqslant U(x)\leqslant 1$ et, par encadrement, $\boxed{\lim_{x\to+\infty}U(x)=1}$

c) Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}u_n(x)=0$, si la série $\sum u_n$ convergeait uniformément sur $\mathbb{R}^+$ (ou sur un intervalle $[a,+\infty[$), on aurait, d'après le théorème de double limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}U(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}u_n(x)=0$ ce qui n'est pas le cas.

On en déduit $\boxed{\sum u_n \text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbb{R}^+}$

4. a) On a $p_n(x)=x\exp(V_n(x))$ où $V_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}v_k(x)$ est la somme partielle de la série $\sum v_n(x)$. Comme $\sum v_n$ CVS sur $\mathbb{R}$ vers V et, par continuité de la fonction exponentielle, on a $\boxed{\lim_{n\to+\infty}p_n(x)=xe^{V(x)} \text{ pour tout réel } x}$

b) Comme V est continue sur $\mathbb{R}$, $\boxed{p \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

Partie II

1. $(1+X)^{2n}-(1-X)^{2n}=X^{2n}-X^{2n}+2\dbinom{1}{2n}X^{2n-1}+\dots$ donc $\boxed{\deg(Q_n)=2n-1 \text{ et son coefficient dominant vaut } 2n}$

2. On a $\left(1+\dfrac{x}{2n}\right)^{2n}=\exp\left[2n\ln\left(1+\dfrac{x}{2n}\right)\right]\underset{n\to+\infty}{=}\exp\left[2n\left(\dfrac{x}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right]\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^x$. On trouve de même $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{2n}\right)^{2n}=e^{-x}$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}Q_n\left(\frac{x}{2n}\right)=\mathrm{sh}(x)}$

3. a) On a $z\neq 1$ et $\dfrac{1+z}{1-z}=\exp\left(\dfrac{ik\pi}{n}\right)=\omega_k$ pour un entier $k\in[\![1-n,n]\!]$. Puis $\dfrac{1+z}{1-z}=\omega_k\Leftrightarrow(1+\omega_k)z=1-\omega_k$; cette équation n'a pas de solution pour $k=n$ puisque $w_n=-1$. Il reste donc $2n-1$ solutions qui sont données par $z_k=\dfrac{1-\omega_k}{1+\omega_k}=\dfrac{e^{i\frac{k\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{2n}}-e^{i\frac{k\pi}{2n}}\right)}{e^{i\frac{k\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{2n}}+e^{i\frac{k\pi}{2n}}\right)}$. Les solutions sont donc $\boxed{z_k=-i\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \text{ pour } k\in[\![1-n,n-1]\!]}$

b) On cherche les racines de Q_n : $Q_n(z)=0 \Leftrightarrow (1+z)^{2n}=(1-z)^{2n} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{2n}=1$ car $z=1$ n'est pas solution de $Q_n(z)=0$. Tous les z_k sont donc des racines de Q_n. Comme $\dfrac{k\pi}{2n}\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ si $k\in[\![1-n,n-1]\!]$ et comme la fonction tan est strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, les z_k sont 2 à 2 distincts.

De plus, Q_n est un polynôme de degré $2n-1$ et de coefficient dominant $2n$; les z_k étant $2n-1$ racines distinctes de Q_n, ce sont toutes les racines de Q_n et elles sont simples.

La factorisation, dans $\mathbb{C}[X]$, de Q_n est donc $Q_n=2n\displaystyle\prod_{k=1-n}^{n-1}(X-z_k)=2nX\prod_{k=1}^{n-1}(X-z_k)(X-z_{-k})$ car $z_0=0$.

On vérifie ensuite que $z_{-k}=-z_k$ ce qui donne $\boxed{Q_n=2nX\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2+\tan^2\frac{k\pi}{2n}\right)}$

c) On a $\dfrac{Q_n(x)}{x}=\dfrac{(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}}{2x}\underset{x\to0}{=}\dfrac{(1+2nx)-(1-2nx)+o(x)}{2x}\xrightarrow[x\to0]{}=2n$ et avec la forme factorisée de Q_n, on trouve aussi $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{Q_n(x)}{x}=2n\prod_{k=1}^{n-1}\tan^2\frac{k\pi}{2n}$. On a donc $1=\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\tan^2\frac{k\pi}{2n}$ et en reprenant l'expression de **II.3.a**, on en déduit $Q_n=2nX\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\tan^2\frac{k\pi}{2n}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{X^2}{\tan^2\frac{k\pi}{2n}}\right)$ puis $\boxed{Q_n=2nX\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{X^2}{\tan^2\frac{k\pi}{2n}}\right)}$

4. a) On étudie $g:t\mapsto t-\tan(t)$, $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $g'(t)=-\tan^2 t<0$ si $t>0$ et $g(0)=0$ donc $g>0$ sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ puis $0<t<\tan(t)$ sur cet intervalle. On en déduit $0<t^2\leqslant\tan^2 t$ et $\dfrac{1}{t^2}\geqslant\dfrac{1}{\tan^2 t}$. On a ensuite $1+\dfrac{1}{\tan^2 t}=\dfrac{1}{\sin^2 t}$; on prouve de même, par étude de fonction, que, sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $0<\sin(t)\leqslant t$ ce qui donne $\dfrac{1}{t^2}\leqslant\dfrac{1}{\sin^2 t}=1+\dfrac{1}{\tan^2 t}$.

On pouvait aussi utiliser la convexité de tan *sur* $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ *donc son graphe est au dessus de sa tangente en* 0 *d'équation* $y=x$.

b) Si $k\in[\![1,n-1]\!]$ alors $\dfrac{k\pi}{2n}\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\dfrac{1}{\tan^2\frac{k\pi}{2n}}\leqslant\dfrac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n}\right)^2}\leqslant1+\dfrac{1}{\tan^2\frac{k\pi}{2n}}$. En multipliant ces inégalités par $\left(\dfrac{x}{2n}\right)^2\geqslant0$, puis en ajoutant 1, on obtient $1+\dfrac{\left(\frac{x}{2n}\right)^2}{\tan^2\frac{k\pi}{2n}}\leqslant1+\dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\leqslant\left(\dfrac{x}{2n}\right)^2+\left(1+\dfrac{\left(\frac{x}{2n}\right)^2}{\tan^2\frac{k\pi}{2n}}\right)$ ce qui donne l'encadrement cherché puisque $\left(\dfrac{x}{2n}\right)^2+\left(1+\dfrac{\left(\frac{x}{2n}\right)^2}{\tan^2\frac{k\pi}{2n}}\right)\leqslant\left(1+\left(\dfrac{x}{2n}\right)^2\right)\left(1+\dfrac{\left(\frac{x}{2n}\right)^2}{\tan^2\frac{k\pi}{2n}}\right)$

La fonction ln étant croissante, on obtient $\boxed{\ln\left(1+\dfrac{\left(\frac{x}{2n}\right)^2}{\tan^2\frac{k\pi}{2n}}\right)\leqslant v_k(x)\leqslant\ln\left(1+\left(\dfrac{x}{2n}\right)^2\right)+\ln\left(1+\dfrac{\left(\frac{x}{2n}\right)^2}{\tan^2\frac{k\pi}{2n}}\right)}$ pour $k\in[\![1,n-1]\!]$.

c) En sommant ces inégalités pour $k\in[\![1,n-1]\!]$ et compte tenu de $Q_n\left(\dfrac{x}{2n}\right)=x\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{\left(\frac{x}{2n}\right)^2}{\tan^2\frac{k\pi}{2n}}\right)$, on obtient

$\ln\dfrac{Q_n\left(\frac{x}{2n}\right)}{x}\leqslant\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}v_k(x)\leqslant(n-1)\ln\left(1+\left(\frac{x}{2n}\right)^2\right)+\ln\frac{Q_n\left(\frac{x}{2n}\right)}{x}$.

On termine avec $(n-1)\ln\left(1+\left(\dfrac{x}{2n}\right)^2\right)\underset{n\to+\infty}{=}(n-1)\left(\dfrac{x^2}{4n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, donc par encadrement, on trouve $\boxed{V(x)=\ln\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x}\text{ si }x\neq0}$ compte tenu de **II.1** et par continuité de la fonction ln.

5. U et $x\mapsto\ln\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc, en dérivant l'égalité précédente, avec $V'(x)=U(x)$, $\boxed{U(x)=\dfrac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}-\dfrac{1}{x}}$

6. On a, pour $x\neq0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^2+n^2\pi^2}=\frac{1}{2x}\left(\frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}-\frac{1}{x}\right)$ et on va faire tendre x vers 0 dans cette égalité. On utilise donc le théorème de continuité avec $g_n(x)=\dfrac{1}{x^2+n^2\pi^2}$ (*ou de double limite en* 0) :

H1 : pour tout $n\geqslant1$, la fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$.

H2 : $|g_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{n^2\pi^2}$ (indépendant de x) donc $\|g_n\|_\infty\leqslant\dfrac{1}{n^2\pi^2}$ donc $\sum g_n$ CVN sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que $G : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2 \lim_{x\to 0} G(x) = \pi^2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x}\left(\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} - \frac{1}{x}\right)$. On a $\frac{1}{2x}\left(\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} - \frac{1}{x}\right) = \frac{x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{2x^2\,\mathrm{sh}(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{2x^3}$ puis $x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) \underset{0}{=} x\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) - \left(x + \frac{x^3}{6}\right) + o\left(x^3\right)$ donc $x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{6}$, ce qui achève le calcul et donne $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} = \frac{\pi^2}{6}}$

Partie III

1. $t \mapsto S(t) = \frac{\sin(xt)}{e^{\pi t} - 1}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\lim_{t\to 0} S(t) = \frac{x}{\pi}$ et $S(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc S est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. On a, pour $t > 0$, $\frac{1}{e^{\pi t} - 1} = \frac{e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi(n+1)t}$ car $\left|e^{-\pi t}\right| < 1$ donc $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(xt) e^{-\pi(n+1)t}$; on applique donc le TITT avec $f_n(t) = \sin(xt)e^{-\pi(n+1)t}$:
H1 : $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^{+*}$.
H2 : les fonctions f_n et la fonction S sont $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
H3 : f_n est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (car $(n+1)\pi > 0$)
H4 : $|f_n(t)| \leqslant |x| t e^{-\pi(n+1)t}$ et $t \mapsto t e^{-\pi(n+1)t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc, par croissance de l'intégrale, $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant |x| \int_0^{+\infty} t e^{-\pi(n+1)t}\,\mathrm{d}t \overset{\mathrm{IPP}}{=} \frac{|x|}{\pi^2(n+1)^2}$ car $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \frac{-e^{-\pi(n+1)t}}{\pi(n+1)}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$. On en déduit $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

On a donc $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Enfin, $f_n(t) = \mathrm{Im}\left(e^{-(\pi(n+1)-ix)t}\right)$ et $t \mapsto e^{-(\pi(n+1)-ix)t}$ est $\mathcal{CM}^0$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\left|e^{-(\pi(n+1)-ix)t}\right| = e^{-\pi(n+1)t}$ et $(n+1)\pi > 0$; on a donc $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(\pi(n+1)-ix)t}\right)$ puis $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\pi(n+1) - ix}\right) = \frac{x}{x^2 + \pi^2(n+1)^2} = \frac{1}{2} u_{n+1}(x)$. Ainsi, $\boxed{f(x) = \frac{1}{2} U(x)}$

3. a) On effectue une IPP avec $u : t \mapsto 1 - \cos(xt)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{e^{\pi t} - 1}$ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; $\lim_{t\to 0} u(t)v(t) = \lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ donc $f(x) = -\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{\pi}{x} \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos(xt))e^{\pi t}}{\left(e^{\pi t} - 1\right)^2}\,\mathrm{d}t}$

b) On pose cette fois $u = xt : t \mapsto \frac{u}{x}$ est $\mathcal{C}^1$ bijective strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on termine avec $\frac{e^{\pi u/x}}{\left(e^{\pi u/x} - 1\right)^2} = \frac{1}{\left[e^{-\pi u/2x}\left(e^{\pi u/x} - 1\right)\right]^2} = \frac{1}{\left(2\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi u}{2x}\right)^2}$

c) sh est convexe sur $\mathbb{R}^+$ car $\mathrm{sh}'' = \mathrm{sh} \geqslant 0$ et l'équation de sa tangente en 0 est $y = \mathrm{sh}'(0)x + \mathrm{sh}(0) = x$ donc $\mathrm{sh}(t) \geqslant t$ si $t \geqslant 0$.
On applique alors le TCDPC avec $h(x,u) = \frac{1 - \cos u}{x^2\,\mathrm{sh}^2\left(\frac{\pi u}{2x}\right)}$:
H1 : pour $u > 0$, $\lim_{x\to+\infty} h(x,u) = 4\frac{1 - \cos u}{\pi^2 u^2}$ car $\mathrm{sh}(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$.
H2 : pour $x > 0$, $u \mapsto h(x,u)$ et $u \mapsto 4\frac{1 - \cos u}{\pi^2 u^2}$ sont $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
H3 : on a $|h(x,u)| = \frac{1 - \cos u}{x^2\,\mathrm{sh}^2\left(\frac{\pi u}{2x}\right)} \leqslant 4\frac{1 - \cos u}{\pi^2 u^2} = \psi(u)$ (in dépendante de u) ; ψ est $\mathcal{CM}^0$ et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $\lim_{u\to 0} \psi(u) = \frac{2}{\pi^2}$ et $\psi(u) \underset{u\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{u^2}\right)$.
On en déduit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} \int_0^{+\infty} 4\frac{1 - \cos u}{\pi^2 u^2}\,\mathrm{d}u = \boxed{\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u}$

d) Comme $\lim_{+\infty} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{+\infty} U = \frac{1}{2}$ (*que l'on peut aussi recalculer avec* **II.5**), on a $\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u$ donc $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}}$