L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet se compose de deux problèmes indépendants. Il est conseillé de passer à peu près 2h sur chacun d'eux. Veuillez changer de page pour commencer le second problème.

Problème 1 : Diverses propriétés des endomorphismes autoadjoints positifs

(Extrait de CCP PSI 2011 maths 2)

Notations.

Dans tout le problème, $n \in \mathbb{N}^*$. On note $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes, $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices colonnes à n lignes. $O(n)$ désigne le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $\text{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans cet ordre. L'écriture $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A.
On note A^T la matrice transposée de A et $\text{tr}(A)$ la trace de la matrice carrée A.
Dans tout le problème, on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Le produit scalaire de deux vecteurs $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ est noté $(x|y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\|x\|$ désigne la norme du vecteur x.
Soient X et Y les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des composantes de x et y dans $\mathcal{B}$, le produit $X^T Y$ appartient à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et son unique coefficient est $(x|y)$. On écrira $(x|y) = X^T Y$ qui est le produit scalaire canonique des matrices X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On note S_n^+ (resp. S_n^{++}) l'ensemble des matrices $S \in S_n(\mathbb{R})$ qui vérifient : pour tout X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T S X \geqslant 0$ (resp. $X^T S X > 0$).
Pour $S \in S_n(\mathbb{R})$, soit s l'endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^n$ et soit x le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de matrices S et X relativement à $\mathcal{B}$. On a donc $X^T S X = (x|s(x))$.

Partie I - Racine carrée d'une matrice de S_n^+.

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres de S comptées autant de fois que leur ordre de multiplicité. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de S avec $\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ SX_i = \lambda_i X_i$.

1. On veut montrer que $S \in S_n^+$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \lambda_i \geqslant 0$.

a) On suppose que $S \in S_n^+$. Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \lambda_i \geqslant 0$.

b) On suppose que $\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \lambda_i \geqslant 0$. Montrer que $S \in S_n^+$.

On montre de même, et on admettra, qu'une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ appartient à S_n^{++} si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

c) On suppose que $S \in S_n^{++}$ et donc que $\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \lambda_i > 0$. Montrer que S est inversible et que $S^{-1} \in S_n^{++}$.

2. On suppose de plus que $S \in S_n^+$.

a) Soient $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. Calculer Δ^2.
On suppose que $N \in S_n^+$ vérifie $N^2 = D$. On note $(C_1, \ldots, C_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Soient $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i C_i$ et $\mu \in \mathbb{R}^+$ tels que $NY = \mu Y$.
Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \mu^2 y_i = \lambda_i y_i$ puis $\mu y_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$.
En déduire $N = \Delta$.

b) Soit $U \in O(n)$ telle que $S = UD\,{}^tU$.
Déterminer une matrice $T \in S_n^+$ telle que $T^2 = S$.
Montrer que T est unique.

On notera $T = \sqrt{S}$ l'unique matrice $T \in S_n^+$ telle que $T^2 = S$.

3. Une détermination de $\sqrt{S}$. On suppose que $S \in S_n^+$ et que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de S. On note $0 \leqslant \mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_p$ les valeurs propres **distinctes** de S. Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on définit les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $\mu_1, \ldots, \mu_p$ par :

$$\forall k \in [\![1, p]\!]\,,\ \forall a \in \mathbb{R},\ L_k(a) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{a - \mu_j}{\mu_k - \mu_j}$$

a) Pour $i \in [\![1,n]\!]$, calculer $L_k(S)X_i$ en distinguant les cas $\mu_k = \lambda_i$ et $\mu_k \neq \lambda_i$
(on rappelle que les X_i, définis au début de cette partie, appartiennent à une base orthonormale de vecteurs propres de S avec $\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ SX_i = \lambda_i X_i$).

b) Soit P le polynôme de degré $\leq p-1$, à coefficients réels tel que $\forall k \in [\![1,p]\!]\,,\ P(\mu_k) = \sqrt{\mu_k}$.
Exprimer P comme une combinaison linéaire des polynômes L_k.
Calculer $P(S)X_i$ et en déduire que $P(S) \in S_n^+$.
Montrer que $P(S) = \sqrt{S}$.

c) En appliquant les questions précédentes, on prend $S = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que $S \in S_3^+$.
Exprimer $\sqrt{S}$ comme une combinaison des matrices S et $I_3 = \mathrm{diag}(1,1,1)$.

Partie II - Une propriété de la trace des matrices de S_n^+.

1. Soit $S \in S_n^+$.

a) On considère la matrice $\delta = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec $\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ \alpha_i \geqslant 0$. Soit $V = (v_{i,j}) \in O(n)$.
Montrer que $\mathrm{tr}(\delta V) \leqslant \mathrm{tr}(\delta)$.

b) En déduire que pour tout $U \in O(n)$, on a $\mathrm{tr}(SU) \leqslant \mathrm{tr}(S)$.

2. Réciproque de la propriété **II.1**.
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall U \in O(n),\ \mathrm{tr}(AU) \leqslant \mathrm{tr}(A)$. On veut montrer que $A \in S_n^+$.

a) Un lemme technique. Soient a, b, θ des réels.
Montrer qu'il existe un réel φ indépendant de θ tel que $a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$.
En déduire que l'inégalité « $\forall \theta \in \mathbb{R},\ a\cos(\theta) + b\sin(\theta) \leqslant a$ » entraîne $b = 0$.

b) On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à la base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour p et q entiers tels que $1 \leqslant p < q \leqslant n$, on note Π le plan vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs e_p et e_q. Soit u l'isométrie de $\mathbb{R}^n$ telle que u induit sur le plan Π, orienté par la base (e_p, e_q), la rotation d'angle θ et telle que u induit l'identité sur l'orthogonal de Π.
Écrire la matrice U de u relativement à la base $\mathcal{B}$.
Calculer $\mathrm{tr}(AU)$.
En déduire que $A \in S_n(\mathbb{R})$.

c) On note l l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A relativement à la base orthonormale $\mathcal{B}$. On considère une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ formée de vecteurs propres de l. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on notera $l(v_i) = \beta_i v_i$. On suppose qu'une valeur propre de l est strictement négative et on ordonne la base $\mathcal{V}$ pour que $\beta_1 < 0$. Soit u l'isométrie de $\mathbb{R}^n$ définie sur la base $\mathcal{V}$ par $u(v_1) = -v_1$ et pour $i \neq 1$, $u(v_i) = v_i$. En notant U la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$, montrer que l'inégalité $\mathrm{tr}(AU) \leqslant \mathrm{tr}(A)$ est absurde et en déduire que $A \in S_n^+$.

Partie III - Des inégalités remarquables.

Soit $S \in S_n^{++}$ et soit $T \in S_n^{++}$ telles que $T^2 = S$. On note s et t les automorphismes de $\mathbb{R}^n$ de matrices S et T relativement à la base orthonormale $\mathcal{B}$. Soient s^{-1} et t^{-1} les applications réciproques de s et t. On note $0 < \lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$ les n valeurs propres de s.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer
$$\|x\|^4 = (t(x)|t^{-1}(x))^2 \leqslant (s(x)|x)(s^{-1}(x)|x) \tag{1}$$
À quelle condition sur x a-t-on égalité dans l'inégalité de droite ?

2. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall a \in \mathbb{R},\ P(a) = a^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)a + \lambda_1\lambda_n$$
Pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, déterminer le signe de $P(\lambda_i)$.
Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $v = -P(s) \circ s^{-1}$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, tel que $s(x) = \lambda_i x$. Calculer $v(x)$ et montrer que x est vecteur propre de v. En déduire que la matrice V de v relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie $V \in S_n^+$.

3. Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. On considère le polynôme Q défini sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall a \in \mathbb{R},\ Q(a) = (s(x)|x)a^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)\|x\|^2 a + (s^{-1}(x)|x)\lambda_1\lambda_n$$
Déterminer le signe de $Q(0)$ et celui de $Q(1)$. En déduire l'inégalité
$$(s(x)|x)(s^{-1}(x)|x) \leqslant \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\|x\|^4 \tag{2}$$

4. On suppose que $\lambda_1 < \lambda_n$. Soient v_1 et v_n des vecteurs de norme 1 tels que $s(v_1) = \lambda_1 v_1$ et $s(v_n) = \lambda_n v_n$. Soit $x = v_1 + v_n$.
Calculer les produits scalaires $(s(x)|x)$ et $(s^{-1}(x)|x)$.
Montrer que le vecteur x vérifie l'égalité dans (2).

fin du problème I

Problème 2 : Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

(inspiré de CCP PC 2020)

Dans ce problème, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs. À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n+1$, le pion se trouve en $x+1$ avec une probabilité $p \in]0,1[$ ou se trouve en $x-1$ avec une probabilité $q = 1-p$, ceci indépendamment des mouvements précédents.
Pour modéliser cette situation, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = p \quad et \quad P(X_k = -1) = 1 - p.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

- si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$;
- sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$.

L'événement $(T = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide.
Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Partie I - Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

1. Que représente la variable aléatoire S_n ?

2. Calculer p_0, p_1 et p_2.

3. Justifier que, si $k \in \mathbb{N}$, alors on a $p_{2k+1} = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \dfrac{X_k + 1}{2}$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

5. Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, exprimer S_n en fonction de Z_n et en déduire la loi de S_n.

6. Déduire de la question précédente que, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$p_{2k} = \binom{2k}{k} p^k (1-p)^k.$$

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On note R_f le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} p_{2n} x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n} x^n \quad \text{pour } |x| < R_f$$

1. Déterminer R_f.

2. Rappeler le développement en série entière de $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-u}}$ et exprimer ses coefficients en fonctions des coefficients binomiaux $\dbinom{2n}{n}$.

3. En déduire la valeur de $f(x)$, pour $|x| < R_f$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

On note R_g le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} q_{2n} x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

1. Calculer q_1 et q_2.

2. Montrer que $R_g \geqslant 1$.

3. Soit $n \geqslant 1$ et $k > n$. Déterminer $P(S_{2n} = 0 | T = 2k)$.
En déduire que, pour $n \geqslant 1$, on a

$$p_{2n} = \sum_{k=0}^{n} p_{2k} q_{2(n-k)}.$$

4. En déduire :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

5. En déduire la valeur de $g(x)$ puis la valeur exacte de R_g.

6. Conclure

$$P(T = 2k) = \binom{2k}{k} \frac{p^k (1-p)^k}{2k-1} \quad \text{pour } k \geqslant 1.$$

7. On suppose dans cette question $p \neq \dfrac{1}{2}$.

a) Vérifier $R_g > 1$ et en déduire la valeur de $P(T = +\infty)$.

b) La série $\sum_{k \geqslant 0} 2k P(T = 2k)$ est-elle convergente ?

8. On suppose dans cette question $p = \dfrac{1}{2}$.

a) Déterminer R_g et calculer la valeur de $P(T = +\infty)$.

b) La série $\sum_{k \geqslant 0} 2k P(T = 2k)$ est-elle convergente ?

Partie IV - Nombre de cases visitées

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la variable aléatoire N_n correspondant au nombre de cases par lesquelles le pion est passé au cours des n premiers déplacements ; on a donc $N_0 = 1$ puisque à l'instant initial, seule la case 0 a été visitée.

1. Montrer, pour $i \geqslant 1$:

$$P(S_i \in \{S_0, S_1, \ldots, S_{i-1}\}) = P(T \leqslant i)$$

Dans la suite, on note W_i la variable aléatoire qui vaut 1 si à l'instant i le pion visite une nouvelle case et 0 sinon, de sorte que

$$N_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} W_i$$

2. En déduire, pour $n \geqslant 1$, $E(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} P(T > i)$.

3. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{E(N_n)}{n} = P(T = +\infty)$.

On pourra utiliser le théorème de Césaro : si (u_n) est une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k = \ell$.