Correction du DS7

Problème 1 : (Extrait de CCP PSI 2011 maths 2)
Partie I :

1. a) On a $(SX_i|X_i) = \lambda_i\|X_i\|^2 \geqslant 0$ et $X_i \neq 0$ donc $\boxed{\lambda_i \geqslant 0}$

b) Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\exists (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $X = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i$. On a $(SX|X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i^2 \geqslant 0$ donc $\boxed{S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$

c) On a $\det(S) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$ donc $\boxed{S \text{ est inversible}}$ De plus, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)P^T$; donc $S^{-1} = P\mathrm{diag}\left(\lambda_1^{-1},\dots,\lambda_n^{-1}\right)P^T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}(S^{-1}) = \left\{\lambda_i^{-1}, i \in [\![1,n]\!]\right\} \subset \mathbb{R}^{+*}$ et $\boxed{S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$

2. a) $\boxed{\Delta^2 = D}$
Si $NY = \mu Y$ alors $DY = N^2Y = \mu NY = \mu^2 Y$; en identifiant la $i^{\text{ème}}$ coordonnée, on a $\mu^2 y_i = \lambda_i y_i$. On en déduit $\left(\mu + \sqrt{\lambda_i}\right)\left(\mu - \sqrt{\lambda_i}\right) y_i = 0$. Comme $\mu + \sqrt{\lambda_i} \geqslant 0$, on distingue deux cas : soit $\mu = \lambda_i = 0$ et on a bien $\mu y_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$; soit $\mu + \sqrt{\lambda_i} > 0$ et on obtient $\left(\mu - \sqrt{\lambda_i}\right) y_i = 0$. Dans les deux cas, on a $NY = \Delta Y$. Si on introduit $(Y_1,\dots,Y_n)$ une base de vecteurs propres de N, alors on a $NY_k = \Delta Y_k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ d'après ce qui précède. Comme N et Δ coïncident sur une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\boxed{N = \Delta}$

b) La matrice $T = U\Delta U^T$ convient. Si T' est une autre solution, on pose $N = U^T T' U$, on a alors $N^2 = D$ donc $N = \Delta$ puis $T' = T\Delta U^T = T$. On en déduit que $\boxed{T^2 = S \text{ si et seulement si } T = U\Delta U^T}$

3. a) On a $L_k(S)X_i = L_k(\lambda_i)X_i$ car $SX_i = \lambda_i X_i$. On en déduit $\boxed{L_k(S)X_i = \begin{cases} X_i & \text{si } \lambda_i = \mu_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

b) On a $\boxed{P = \sum_{k=1}^{p} \sqrt{\mu_k} L_k}$ puis $P(S)X_i = \sum_{k=1}^{p} \sqrt{\mu_k} L_k(S)X_i = \sqrt{\mu_{k_0}} L_{k_0}(S)X_i$ avec k_0 tel que $\lambda_i = \mu_{k_0}$. On a donc $P(S)(X_i) = \sqrt{\lambda_i} X_i$. Comme S est symétrique, $P(S)$ est symétrique. De plus $(X_1,\dots,X_n)$ est une base de vecteurs propres de $P(S)$ associée aux valeurs propres $\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n}$ donc $P(S) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Enfin $P(S)$ et $\sqrt{S}$ coïncident sur cette base donc $\boxed{\sqrt{S} = P(S)}$

c) $\mathrm{rg}(S - 3I_3) = 1$ donc $\mathcal{X}_S = (3-X)^2(9-X)$; les deux polynômes de Lagrange sont $L_3 = -\dfrac{X-9}{6}$ et $L_9 = \dfrac{X-3}{6}$ donc $\sqrt{S} = \sqrt{3}L_3(S) + 3L_9(S) = -\dfrac{S - 9I_3}{2\sqrt{3}} + \dfrac{S - 3I_3}{2}$ donc $\boxed{\sqrt{S} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}S + \dfrac{3(\sqrt{3}-1)}{2}I_3}$

Partie II

1. a) On a $\mathrm{Tr}(\delta V) - \mathrm{Tr}(\delta) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_{i,i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} (v_{i,i} - 1)\alpha_i$. Or, on a, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} v_{i,j}^2 = 1$ (les vecteurs colonnes de V sont unitaires) donc $|v_{i,i}| \leqslant 1$ et $\boxed{\mathrm{Tr}(\delta V) \leqslant \mathrm{Tr}(\delta)}$ car $\alpha_i \geqslant 0$.

b) Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PDP^T$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et $\lambda_i \geqslant 0$. De plus $\mathrm{Tr}(SU) = \mathrm{Tr}\left(DP^TUP\right) \leqslant \mathrm{Tr}(D)$ car $P^TUP \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{Tr}(D) = \mathrm{Tr}(S)$, on a bien $\boxed{\mathrm{Tr}(SU) \leqslant \mathrm{Tr}(S) \text{ si } U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$

2. a) On cherche φ tel que $\sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi = b$ et $\sqrt{a^2+b^2}\sin\varphi = a$: si $a = b = 0$, on prend $\varphi = 0$ par exemple ; si $a \geqslant 0$ et $b \neq 0$, on prend $\varphi = \arccos\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et si $a < 0$ on prend $\varphi = -\arccos\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Si $\forall \theta \in \mathbb{R}, a\cos\theta + b\sin\theta \leqslant a$ alors on a $\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a$ (avec $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$) donc $b^2 = \sqrt{a^2+b^2}^2 - a^2 \leqslant 0$ et $\boxed{b = 0}$

b) On a $U = I_n - (E_{p,p} - E_{q,q}) + \cos\theta E_{p,p} + \sin\theta E_{q,p} - \sin\theta E_{q,p} + \cos\theta E_{q,q}$ où $(E_{i,j})$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors $\mathrm{Tr}(AU) = \mathrm{Tr}(A) + (\cos\theta - 1)(a_{p,p} + a_{q,q}) + \sin\theta(a_{p,q} - a_{q,p})$. Comme $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ pour toute valeur de θ, on en déduit $\cos\theta(a_{p,p} + a_{q,q}) + \sin\theta(a_{p,q} - a_{q,p}) \leqslant (a_{p,p} + a_{q,q})$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ donc $a_{p,q} = a_{q,p}$ et $\boxed{A \text{ est symétrique}}$

c) On a $\mathrm{Tr}(AU) = \mathrm{Tr}(DU')$ et $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D)$ où $D = \mathrm{diag}(\beta_1,\dots,\beta_n)$ et $U' = -E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i}$ est la matrice de u dans la base $\mathcal{V}$. Comme $\mathrm{Tr}(DU') = \mathrm{Tr}(D) - 2\beta_1 > \mathrm{Tr}(D)$, on aboutit à une absurdité. Ainsi on a $\boxed{A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$

Partie III

1. Les endomorphismes t et t^{-1} sont autoadjoints donc $(t(x)|t^{-1}(x)) = (x|t \circ t^{-1}(x)) = (x|x) = \|x\|^2$ et $\|t(x)\|^2 = (t(x)|t(x)) = (t^2(x)|x) = (s(x)|x)$; et de même, on a $\|t^{-1}(x)\|^2 = (s^{-1}(x)|x)$. On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(t(x)|t^{-1}(x))^2 \leqslant \|t(x)\|^2 \times \|t^{-1}(x)\|^2$ et on obtient $\boxed{\|x\|^4 = (t(x)|t^{-1}(x)) \leqslant (s(x)|x) \times (s^{-1}(x)|x)}$
On a égalité si et seulement si il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz donc si et seulement si les vecteurs $t(x)$ et $t^{-1}(x)$ sont liés, ie si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $t(x) = \lambda t^{-1}(x)$ (car si $t(x) = 0$ alors $x = 0$ et $t^{-1}(x) = 0$ aussi) ; de plus $t(x) = \lambda t^{-1}(x)$ si et seulement si $s(x) = \lambda x$ donc l'égalité a lieu si et seulement si x est un vecteur propre de s.

2. On a $P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_n)$ donc $\boxed{P(\lambda_i) \leqslant 0 \text{ pour tout } i \in [\![1, n]\!]}$
On a $s^{-1}(x) = \dfrac{1}{\lambda_i}x$ donc $v(x) = -\dfrac{P(\lambda_i)}{\lambda_i}x$ et x est un vecteur propre de v pour la valeur propre $-\dfrac{p(\lambda_i)}{\lambda_i} \geqslant 0$. On en déduit que toute base orthonormée de vecteurs propres de s est une base de vecteurs propres de v donc V est symétrique (car diagonale donc symétrique dans une base orthonormée) et les valeurs propres de v sont positives donc $\boxed{V \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$

3. On a $Q(0) = (s^{-1}(x)|x)\lambda_1\lambda_n > 0$ car $S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et
$Q(1) = (s(x) - (\lambda_1 + \lambda_n)x + s^{-1}(x)|x) = P(s) \circ s^{-1}(x)|x) = -(v(x)|x) \leqslant 0$.
On en déduit que le polynôme Q de degré 2 (car $(s(x)|x) \neq 0$) s'annule sur $[0, 1]$ car il est continu donc (discriminant) $\Delta = (\lambda_1 + \lambda_n)^2\|x\|^4 - 4\lambda_1\lambda_n(s(x)|x)(s^{-1}(x)|x) \geqslant 0$ ce qui donne $\boxed{(s(x)|x)(s^{-1}(x)|x)) \leqslant \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\|x\|^4}$

4. Comme $\lambda_1 \neq \lambda_n$, les vecteurs v_1 et v_2 sont orthogonaux donc $(s(x)|x) = (\lambda_1 v_1 + \lambda_n v_n|v_1 + v_n) = \lambda_1\|v_1\|^2 + \lambda_n\|v_n\|^2 = \lambda_1 + \lambda_n$ et de même $(s^{-1}(x)|x) = \dfrac{1}{\lambda_1} + \dfrac{1}{\lambda_n}$. On a alors $(s(x)|x)(s^{-1}(x)|x) = \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1 + \lambda_n}$. D'autre part, on a $\|x\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 = 2$ (Pythagore) donc $\|x\|^4 = 4$ et $\boxed{x \text{ vérifie bien l'égalité dans (2)}}$

Problème 2 : (inspiré de CCP PC 2020)
Partie I

1. S_n est la position du pion à l'instant n

2. $(S_0 = 0)$ est certain donc $\boxed{p_0 = 1}$
Après un déplacement, le pion ne peut pas être en 0 donc $\boxed{p_1 = 0}$ et le pion reviendra en 0 après deux déplacements s'ils sont en sens inverses donc $(S_2 = 0) = (X_1 = 1, X_2 = -1) \cup (X_1 = -1, X_2 = 1)$; par incompatibilité des événements $(X_1 = 1, X_2 = -1)$ et $(X_1 = -1, X_2 = 1)$ puis par indépendance de X_1 et X_2, on a $\boxed{p_2 = 2p(1 - p}$

3. On ne peut pas revenir en 0 avec un nombre impair de déplacements (il en faut autant vers la gauche que vers la droite) donc $(S_{2k+1} = 0)$ est impossible et $\boxed{p_{2k+1} = 0}$

4. X_k représente la valeur (algébrique) du déplacement n : $+1$ pour un déplacement vers la droite, -1 vers la gauche. Y_k est à valeurs dans $\{0, 1\}$ donc Y_k est une variable de Bernoulli ; la probabilité d'un saut vers la droite étant p, on a $\boxed{Y_k \sim \mathscr{B}(p)}$; ou avec $(Y_k = 1) = (X_k = 1)$.

5. Comme $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions, $Y_1, \ldots, Y_n$ sont aussi indépendantes. Ainsi, Z_n est la somme de n variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{B}(p)$ donc $\boxed{Z_n \sim \mathscr{B}(n, p)}$
On a $Z_n = \dfrac{S_n + n}{2}$ donc $S_n = 2Z_n - n$ et $\boxed{Z_n(\Omega) = \{-n + 2k, k \in [\![0, n]\!]\}}$ et
$\boxed{P(S_n = k) = \binom{n}{h}p^h(1 - p)^{n-h} \text{ si } n + k = 2h \text{ avec } h \in [\![0, n]\!]}$

6. On a donc, avec $k = 0$, $p_{2n} = \dbinom{2n}{h}p^h(1 - p)^{2n-h}$ avec $2n = 2h$ donc $h = n$, ce qui donne $\boxed{p_{2n} = \binom{2n}{n}p^n(1 - p)^n}$

Partie II

1. $p_{2k} \neq 0$ et $\left|\dfrac{p_{2k+2}}{p_{2k}}\right| = \dfrac{(2k + 2)(2k + 1)}{(k + 1)^2}p(1 - p) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 4p(1 - p)$ donc, par d'Alembert, $\boxed{R_f = \dfrac{1}{4p(1 - p)}}$

2. On a $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1 - u}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \dfrac{u^n}{4^n} \text{ si } |u| < 1}$

3. On en déduit $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)x}} \text{ si } |x| < \dfrac{1}{4p(1-p)}}$

Partie III

1. $(T=1) = (S_1 = 0) = \emptyset$ donc $\boxed{q_1 = 0}$ puis $(T=2) = (S_1 \neq 0, S_2 = 0) = (S_2 = 0)$ donc $\boxed{q_2 = 2p(1-p)}$

2. $q_n \in [0,1]$ donc (q_{2n}) est une suite bornée et $\boxed{R_g \geqslant 1}$

3. Si on suppose $(T = 2k)$ réalisé alors pour $n \leqslant 2k-1$, on a $S_n \neq 0$ donc $\boxed{P(S_{2n} = 0 | T = 2k) = 0 \text{ si } k \geqslant n+1}$
On utilise le système complet d'événements $(T = 2k)_{k\geqslant 1}, (T = +\infty)$. Si on suppose $(T = +\infty)$ réalisé alors $S_{2n} \neq 0$ ce qui donne, en n'écrivant que les termes à priori non nuls, $P(S_{2n} = 0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(S_{2n} = 0 | T = 2k) \times P(T = 2k)$.
Il reste à justifier que $P(S_{2n} = 0 | T = 2k) = P(S_{2(n-k)=0})$: si $(T = 2k)$ est réalisé alors $S_{2k} = 0$ donc on a $S_{2n} = \displaystyle\sum_{h=2k+1}^{2n} X_h$; comme les X_i suivent tous la même loi, on a $P(S_{2n} = 0|T = 2k) = P\left(\displaystyle\sum_{h=2k+1}^{2n} X_h = 0\right)$ ce qui donne $P(S_{2n} = 0|T = 2k) = P\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{2(n-h)} X_i = 0\right) = P(S_{2(n-h)} = 0)$ (cela revient à considérer que comme $(T = 2k)$ est réalisé, on repasse en 0 à l'instant $2k$ donc le parcours entre les instants $2k+1$ et $2n$ est équivalent à celui entre 1 et $2(n-h)$). On a donc $P(S_{2n} = 0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(S_{2(n-k)} = 0) \times P(T = 2k)$. Comme $q_0 = 0$, on peut rajouter le terme $k = 0$, ce qui donne $\boxed{p_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_{2k} q_{2(n-k)}}$

4. Par produit de Cauchy, si $|x| < 1$, on a $f(x)g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ avec $c_0 = p_0 q_0 = 0$ et $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_{2k} q_{2(n-k)}$. On a donc $c_n = p_{2n}$ et $f(x)g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_{2n} x^n$ donc $\boxed{f(x)g(x) = f(x) - 1 \text{ si } |x| < 1}$

5. On en déduit, pour $|x| < 1$, $\boxed{g(x) = 1 - \dfrac{1}{f(x)} = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)x}}$ qui est DSE sur $\left]-\dfrac{1}{4p(1-p)}, \dfrac{1}{4p(1-p)}\right[$ donc $\boxed{R_g = \dfrac{1}{4p(1-p)}}$

6. On peut redévelopper g en série entière : pour $|x| < 1 \leqslant \dfrac{1}{4p(1-p)}$, on a $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} \dfrac{(p(1-p)x)^n}{2n-1}$ et par unicité des coefficients, on a $\boxed{P(T = 2k) = \dbinom{2k}{k} \dfrac{p^k(1-p)^k}{2k-1} \text{ pour } k \geqslant 1}$

7. a) On a $4p(1-p) - 1 = (2p-1)^2 > 0$ donc $R_g > 1$. On a donc $|1| < R_g$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q_{2k} = g(1) = \sqrt{(2p-1)^2} = |1-2p|$.
Comme $(T = -\infty) = \overline{\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (T = 2n)}$, par incompatibilité des $(T = 2n)$, on a $P(T = +\infty) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} q_{2k}$ donc $\boxed{P(T = +\infty) = |1-2p|}$

b) Le rayon de convergence de la série entière obtenue en dérivant g terme à terme est $R_g > 1$ aussi donc $\sum kP(T = 2k)x^{k-1}$ est ACV pour $x = 1 \in]-R_g, R_g[$ donc $\boxed{\sum 2kP(T = 2k) \text{ converge}}$ *(ce n'est pas vraiment l'espérance de T car T n'est pas à valeurs dans $\mathbb{N}$ mais dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.*

8. a) Si $p = \dfrac{1}{2}$, le rayon de convergence de g est $\boxed{R_g = 1}$
On vérifie que g est quand même continue sur $[-1, 1]$:
H1 : $x \mapsto q_{2n} x^n$ est continue sur $[-1, 1]$
H2 : la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} P(T = 2k)$ converge car $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = 2n) = P(T \in \mathbb{N})$; de plus $|q_{2n} x^n| \leqslant P(T = 2n)$ si $x \in [-1, 1]$ donc la série entière définissant g CVN sur $[-1, 1]$

$g \in \mathcal{C}^0([-1,1])$ et on a donc encore $P(T=+\infty) = 1 - g(1) = 1 - \lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$ et $\boxed{P(T=+\infty) = 0 \text{ si } p = \frac{1}{2}}$ ce qui est cette fois dû au fait que les probabilités de se déplacer vers la gauche ou vers la droite sont égales.

b) On vérifie, avec la formule de Stirling que $\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$ donc, on en déduit $2kP(T=2k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}$ (positif) donc $\boxed{\sum 2kP(T=2k) \text{ diverge}}$ *(cette fois, cela signifie bien que T n'a pas d'espérance puisque T est à valeur dans $\mathbb{N}$ presque surement ; on aurait donc pu utiliser que g n'est pas dérivable en 1.)*

Partie IV

1. On a $(S_i \in \{S_0, \ldots, S_{i-1}\}) = \bigcup\limits_{j=0}^{i-1} (S_i = S_j)$ puis $(S_i = S_j) = \left(\sum\limits_{k=j+1}^{i} X_k = 0\right)$; comme les X_k sont indépendantes et suivent la même loi, $P\left(\sum\limits_{k=j+1}^{i} X_k = 0\right) = P\left(\sum\limits_{k=1}^{i-j} X_k = 0\right) = P(S_{i-j} = 0)$. On en déduit donc $P(S_i \in \{S_0, \ldots, S_{i-1}\}) = P\left(\bigcup\limits_{j=0}^{i-1} (S_{i-j} = 0)\right) \overset{h=i-j}{=} P\left(\bigcup\limits_{h=1}^{i} (S_h = 0)\right) = P(T \leqslant i)$ et on peut conclure $\boxed{P(S_i \in \{S_0, \ldots, S_{i-1}\}) = P(T \leqslant i)}$

2. $(W_i = 1) = (S_i \notin \{S_0, \ldots, S_{i-1}\})$ donc $P(W_i = 1) = 1 - P(T \leqslant i) = P(T > i)$; W_i est donc une variable de Bernoulli de paramètre $p_i = P(T > i)$. Par linéarité de l'espérance, on a $E(N_n) = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} E(W_i)$ donc

$$\boxed{E(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} P(T > i)}$$

3. Les événements $(T > i)$ sont décroissants pour l'inclusion donc $\lim\limits_{i\to+\infty} P(T > i) = P\left(\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} (T > i)\right)$, par continuité décroissante, puis $\lim\limits_{i\to+\infty} P(T > i) = P(T \notin \mathbb{N}) = P(T = +\infty)$.

Par le théorème de Césaro, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} P(T > i) = P(T = +\infty)$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a, en ajoutant les 2 limites précédentes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E(N_n)}{n} = P(T = +\infty)}$