TD0 : Révisions DL et séries

Exercice 1

1. Déterminer un DL de $u_n = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2} - e^{-\frac{1}{6}}$ avec la précision $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
2. Déterminer un DL de $v_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{e}}$ avec la précision $O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.
3. Montrer que $w_n = \left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Exercice 2

Déterminer, en fonction de a et b réels, un équivalent de $u_n = \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{n} - a\left(1 + \frac{b}{n}\right)$.

Exercice 3

1. Montrer que, pour $x \in [0,1]$, $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 4

Justifier la convergence et calculer la somme des séries :

1. $\sum_{n \geqslant 2} \frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)}$
   indication : décomposition en éléments simples
2. $\sum_{n \geqslant 0} 3^{n-1} \sin^3 \frac{\alpha}{3^n}$
   indication : linéariser
3. $\sum_{n \geqslant 0} \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!}$
   indication : écrire $\frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!} = \frac{\alpha}{(n+3)!} + \frac{\beta}{(n+2)!} + \frac{\gamma}{(n+1)!} + \frac{\delta}{n!}$.