**Définition :** $F$ est une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbf{K}$ s'il existe deux polynômes $P$ et $Q$ de $\mathbf{K}[X]$ tels que $Q \neq 0$ et $F = \dfrac{P}{Q}$.
On note $\mathbf{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbf{K}$.

# I Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

## 1. Le résultat théorique

**Théorème [I.1] :** Soient $P$ et $Q$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $Q$ étant factorisé sous la forme

$$Q = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)^{r_k}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \alpha_k \in \mathbb{C}$ et $r_k \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall k \in \{1, \dots, n\}, P(\alpha_k) \neq 0$ (les deux polynômes $P$ et $Q$ n'ont alors pas de racine commune, la fraction $\dfrac{P}{Q}$ est alors dite irréductible.)
Alors il existe un polynôme $E$ de $\mathbb{C}[X]$ et des complexes $a_{1,k}, a_{2,k}, \dots, a_{r_k,k}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ tels que

$$\frac{P}{Q} = E + \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{r_k} \frac{a_{i,k}}{(X - \alpha_k)^i} \right)$$

Les coefficients apparaissant dans cette décomposition sont alors uniques.

**Remarque :** Le polynôme $E$ est en fait le quotient de la division euclidienne de $P$ par $Q$. Si $P = EQ + R$ avec $\deg R < \deg Q$, on a alors

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}$$

la fraction $\dfrac{R}{Q}$ étant elle aussi irréductible puisque $R(\alpha_k) = P(\alpha_k)$. On se ramène alors ainsi à une fraction rationnelle dont le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur.
**exemples :**

$$\frac{X^2}{X^2+1} = 1 - \frac{1}{X^2+1}$$

Quand le dénominateur est un seul facteur de degré 1, la décomposition est donnée par la division euclidienne :
$X^5 - 3X^2 + 1 = (X+1)(X^4 - X^3 + X^2 - 4X + 4) - 3$ donc

$$\frac{X^5 - 3X^2 + 1}{X+1} = X^4 - X^3 + X^2 - 4X + 4 - \frac{3}{X+1}$$

$X^7 = (X^4 + X)(X^3 - 1) + X$ donc

$$\frac{X^7}{X^3 - 1} = X^4 + X + \frac{X}{X^3 - 1}$$

Il ne reste plus qu'à décomposer $\dfrac{X}{X^3 - 1}$.

## 2. Quelques exemples

Pour décomposer une fraction rationnelle, on commence par s'assurer que le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur, on factorise le dénominateur, puis on ecrit la forme générale de la décomposition et on cherche à déterminer les coefficients par différentes méthodes.
**exemple 1 :**

$$\frac{1}{X^2 - 1} = \frac{1}{(X-1)(X+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}$$

pour trouver $a$ et $b$, on peut bien sûr réduire au même dénominateur et identifier les coefficients. Certaines astuces permettent d'aller plus vite : pour déterminer $a$, on multiplie toute la ligne (mentalement) par $X-1$ puis on remplace $X$ par 1, on obtient alors $a=\frac{1}{2}$.
Pour déterminer $b$, on peut procéder de la même façon (multiplier par $X+1$ et prendre $X=-1$) ou on peut utiliser la partité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$, ainsi en changeant $X$ en $-X$, d'après l'unicité des coefficients, on trouve $b=-a$. Finalement

$$\frac{1}{X^2-1}=\frac{1}{2(X-1)}-\frac{1}{2(X+1)}$$

**exemple 2 :**

$$\frac{1}{(X^3-1)^2}=\frac{1}{((X-1)(X-j)(X-j^2))^2}=\frac{a}{X-1}+\frac{a'}{(X-1)^2}+\frac{b}{X-j}+\frac{b'}{(X-j)^2}+\frac{c}{X-j^2}+\frac{c'}{(X-j^2)^2}$$

on trouve alors en mutilpliant par $(X-1)^2$ et en prenant $X=1$, $a'=\dfrac{1}{9}$ (cette méthode permet toujours de déterminer le coefficient au dessus de chaque facteur de plus haut degré).
Pour trouver $a$, on peut procéder ainsi : on calcule $\dfrac{1}{(X^3-1)^2}-\dfrac{1}{9(X-1)^2}$, qui ne comporte plus que le terme $\dfrac{a}{X-1}$ (la fraction précédente se simplifie par $X-1$) puis on multiplie par $X-1$ et on prend $X=1$. Cela donne

$$\frac{1}{(X^3-1)^2}-\frac{1}{9(X-1)^2}=\frac{X^4+2X^3+3X^2+2X-8}{9(X^3-1)^2}=-\frac{X^3+3X^2+6X+8}{9(X-1)(X^2+X+1)^2}$$

et donc $a=-\dfrac{18}{9\times 9}=-\dfrac{2}{9}$.
Pour les autres coefficients, on remarque que $F(jX)=F(X)$ or

$$F(jX)=\frac{a}{j(X-j^2)}+\frac{a'}{j^2(X-j^2)^2}+\frac{b}{j(X-1)}+\frac{b'}{j^2(X-1)^2}+\frac{c}{j(X-j)}+\frac{c'}{j^2(X-j)^2}$$

et donc, les coefficients étant uniques on a

$$\frac{b}{j}=a \quad , \quad \frac{b'}{j^2}=a' \quad , \quad \frac{c}{j}=b \quad \text{et} \quad \frac{c'}{j^2}=b'$$

Finalement

$$\frac{1}{(X^3-1)^2}=-\frac{2}{9(X-1)}+\frac{1}{9(X-1)^2}-\frac{2j}{9(X-j)}+\frac{j^2}{9(X-j)^2}-\frac{2j^2}{9(X-j^2)}+\frac{j}{9(X-j^2)^2}$$

**Remarque :** Pour déterminer les derniers coefficients, on peut également choisir quelques valeurs de $X$

# II Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

## 1. Le résultat théorique

**Théorème [II.2] :** Soient $P$ et $Q$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On suppose que la décomposition de $Q$ sur $\mathbb{R}[X]$ est

$$Q = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X-\alpha_i)^{n_i} \prod_{j=1}^{s} (X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{m_j},$$

$$\text{avec } \begin{cases} \lambda \in \mathbb{R} \\ (r,s) \in \mathbb{N}^2 \\ \forall i \in \{1,\ldots,r\}, n_i \in \mathbb{N}^* \text{ et } \alpha_i \in \mathbb{R} \\ \forall i \in \{1,\ldots,s\}, m_j \in \mathbb{N}^*, (\beta_j,\gamma_j) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \beta_j^2 - 4\gamma_j < 0 \end{cases}$$

On suppose que $P$ n'est divisible par aucun des facteurs de la décompositon de $Q$ (la fraction $\dfrac{P}{Q}$ est alors dite irréductible).
Alors il existe un polynôme $E$ de $\mathbb{R}[X]$, et des réels

$$\begin{cases} a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n_i} \text{ pour } i = 1,\ldots,r \\ b_{j,1}, b_{j,2}, \ldots, b_{j,m_j} \text{ et } c_{j,1}, c_{j,2}, \ldots, c_{j,m_j} \text{ pour } j = 1,\ldots,s \end{cases}$$

tels que

$$\frac{P}{Q} = E + \sum_{i=1}^{r} \left( \sum_{k=1}^{n_i} \frac{a_{i,k}}{(X-\alpha_i)^k} \right) + \sum_{j=1}^{s} \left( \sum_{h=1}^{m_j} \frac{b_{j,h}X + c_{j,h}}{(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^h} \right)$$

## 2. Deux exemples

**exemple 3 :** Pour décomposer une fraction sur $\mathbb{R}$, on peut d'abord la décomposer sur $\mathbb{C}$ puis regrouper les termes conjugués (les racines complexes de $Q$ sont conjuguées 2 à 2)

$$\frac{X^2+X+7}{X^3-1} = \frac{3}{X-1} + \frac{2}{j^2(X-j)} + \frac{2}{j(X-j^2)}$$

les deux derniers coefficients étant obligatoirement conjugués. On regroupe

$$\frac{X^2+X+7}{X^3-1} = \frac{3}{X-1} - \frac{2(X+2)}{X^2+X+1}$$

Cette méthode est particulièrement efficace quand les coefficients complexes sont faciles à déterminer comme dans le cas de racines simples.

**exemple 4 :** On peut directement chercher la décomposition sur $\mathbb{R}$

$$\frac{2X+1}{X^4+X^2+1} = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{a'X+b'}{X^2-X+1}$$

en multipliant toute la ligne par $X$ et en faisant tendre $X$ vers $+\infty$, on trouve $0 = a + a'$.
Même en décomposant sur $\mathbb{R}$, on peut utiliser les racines complexes du dénominateur : en multipliant par $X^2+X+1$ et en prenant $X = j$, on trouve $\dfrac{2j+1}{j^2-j+1} = aj+b$ donc $2j+1 = 2(a-b) - 2bj$ et comme $a$ et $b$ sont réels $a - b = 1$ et $-2b = 1$ (car $(1,j)$ est libre sur $\mathbb{R}$) c'est-à-dire $a = -1/2$ et $b = 1/2$.
Enfin pour déterminer $b'$ on peut utiliser la valeur en 0 par exemple : $1 = b + b'$ donc $b' = 3/2$.

$$\frac{2X+1}{X^4+X^2+1} = \frac{X-1}{2(X^2+X+1)} + \frac{-X+3}{2(X^2-X+1)}$$