

TD1 : Séries numériques

Exercice 1 (Centrale PSI 2008)

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^n - a\left(1 + \frac{b}{n}\right)$.

indication : DL en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ puis on discute.

Exercice 2

Étudier, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\sum \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{\alpha}{n}}$.

indication : réécrire la formule de Stirling avec un signe = pour pouvoir la composer par ln.

Exercice 3

Justifier la convergence et calculer la somme de $\sum_{n \geq 2} \frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)}$

indication : décomposition en éléments simples

Exercice 4 (CCP PSI 2017)

On pose $a_n = \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$ et on rappelle $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. Montrer que $\sum a_n$ converge.

2. Soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_{2n+1} - H_n) = \ln 2$.

indication : soit une somme de Riemann, soit une comparaison avec une intégrale, soit le développement vu en cours.

3. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$ et en déduire la valeur de $\sum_{n \geq 1} a_n$.

Exercice 5 (CCINP PSI 2022)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $0 < u_0 \leq \frac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

2. En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que $\sum u_n^3$ converge.

indication : utiliser $\sum (u_{n+1} - u_n)$

3. Étudier la série de terme général u_n^2 .

indication : utiliser $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$

Exercice 6 (Mines-Télécom PSI 2022)

Soient $\alpha > 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ et $w_n = \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge. Quelle est la nature de $\sum w_n$?

2. On suppose $u_n = n$. Nature de $\sum w_n$?

3. On suppose $u_n = \frac{1}{n}$. Nature de $\sum w_n$?