

TD2 : Séries numériques

Exercice 1 (CCP PSI 2016)

Montrer que la série de terme général $u_n = \ln(n + 2(-1)^n) - \ln(n)$ converge mais ne converge pas absolument. Vérifie-t-elle le CSSA ?

indication : DL

Exercice 2

Déterminer la nature des séries $\sum u_n$

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^a + (-1)^n}}$ où $a > 0$.

indication : DL avec un terme de signe fixe

2. $v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$, où $\alpha \neq \beta$.

indication : distinguer $\alpha > \beta$ et $\alpha < \beta$.

Exercice 3

Déterminer la nature des séries de terme général

1. $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$

2. $v_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$

3. $w_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$

indication : exprimer $\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ en fonction de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ et R_{n+1} puis comparer $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ avec w_n .

Exercice 4

Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

indication : pour la première, rajouter les termes pairs ; pour la seconde, séparer pairs/impairs ; les calculs doivent se faire sur des sommes partielles !

Exercice 5 (CCINP PSI 2018)

Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$.

1. Quelle est la limite de la suite (nu_n) ?

2. Donner la nature des séries de termes généraux u_n et $(-1)^n u_n$.

indication : ne pas chercher à utiliser le CSSA mais un DL pour la dernière.

Exercice 6 (CCP PSI 2019)

1. Montrer que $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$ admet une unique solution dans $[0, 1]$; on la note x_n .

2. Montrer que (x_n) tend vers 0.

3. Étudier la nature de la série de terme général x_n puis $(-1)^n x_n$.

indication : chercher un équivalent de x_n pour la première en remarquant que $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(1 - x_n^n)$; ne pas chercher à utiliser le CSSA mais un DL pour la dernière.