Rappels sur les matrices

La notation $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes.

I Matrices d'une application linéaire

<u>Définition</u> : Matrice d'une application linéaire
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_n)$ des bases de E et F respectivement. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on définie **la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$** par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}_F}(f) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ avec } \forall j \in [\![1, p]\!], f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$$

Cela signifie que la $j^{\text{ème}}$ colonne contient les <u>coordonnées</u> du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.
Si f est un endomorphisme de E, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}_E}(f)$.

<u>Attention</u> : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors le nombre de colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}_F}(f)$ est la dimension de E ; la dimension de F est le nombre de lignes de cette matrice.

<u>Exemple(s) :</u>

I.1 Soit : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + 2y - 3z)$

a) Écrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

b) Soient $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$, $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$. Vérifier que $\mathcal{B}_3 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis écrire la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2)$.

I.2 Soit f l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de $X^2 P'$ par $X^4 - 1$.

a) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

<u>Définition</u> : Produit matriciel
Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit de A et B est la matrice $C = AB$ telle que $C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ avec

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!], c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

<u>Exemple(s) :</u>

I.3 Si $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $E_{i,j} E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$.

I.4 Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA$.

Définition : Matrice d'une famille de vecteurs
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs de E. La **matrice des vecteurs** $x_1, \ldots, x_p$ **dans la base** $\mathcal{B}$ est définie par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où

$$\forall j \in [\![1, p]\!] \,, x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

Cela signifie que la $j^{\text{ème}}$ colonne contient les coordonnées du vecteur x_j dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque(s) :

(I.5) On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}_F}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \ldots, f(e_p))$.

(I.6) Dans le cas particulier d'un seul vecteur $x \in E$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est un vecteur colonne qui contient les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.

Propriété [I.1] : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases de E et F respectivement, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$. Si on pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}_F}(f)$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x))$ alors on a

$$Y = AX$$

Exemple(s) :

(I.7) Trouver une base de $\ker(A)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Propriété [I.2] :

1. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille génératrice de E alors
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$$
2. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors
$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\{C_1, \ldots, C_p\}$$
où C_j sont les colonnes de A.

Exemple(s) :

(I.8) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(I.9) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 1$ si et seulement si il existe deux matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que $A = XY^T$.

II Changement de base

Définition : Matrice de passage
Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ sont deux bases de E, la **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice

$$P(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n)$$

La $j^{\text{ème}}$ colonne de $P(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ contient donc les coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\mathcal{B}$.

Propriété [II.1] : **Changements de base**

1. (**Coordonnées d'un vecteur**) : si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, $P = P(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$, $x \in E$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ les vecteurs colonnes des coordonnées de x dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ alors
$$X = PX'$$
2. (**Application linéaire**) : si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E, $P = P(P(\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}'_E)$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_f$ deux bases de F, $Q = P(\mathcal{B}_F \to \mathcal{B}'_F)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}_F}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E \to \mathcal{B}'_F}(u)$ alors
$$A = QA'P^{-1}$$

Exemple(s) :

(II.1) Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

III Théorème du rang

Théorème [III.1] : **(Théorème du rang – forme géométrique)**
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Si S est un supplémentaire de $\ker(u)$ dans E alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(u)$, ie
$$\begin{array}{rccc} \widetilde{u} & : & S & \longrightarrow & \mathrm{Im}(u) \\ & & x & \longmapsto & u(x) \end{array} \text{ est un isomorphisme.}$$

Conséquence [III.2] : **(Théorème du rang)**
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie alors $\mathrm{rg}(u)$ est fini et
$$\mathrm{rg}(u) = \dim(E) - \dim(\ker(u))$$

Remarque(s) :

(III.1) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $\mathrm{rg}(A) = p - \dim(\ker(A))$. C'est donc le nombre de colonnes de A qui intervient dans cette formule !

Exemple(s) :

(III.2) Étude du noyau puis de l'image d'une application linéaire : déterminer des bases du noyau puis de l'image de f, canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(III.3) Étude de l'image puis du noyau : déterminer des bases de l'image puis du noyau de g, canoniquement associée à $B = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

Conséquence [III.3] : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies égales et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i. u est un isomorphisme.
ii. u est injectif ($\ker(u) = \{0\}$)
iii. u est surjectif ($\mathrm{rg}(u) = \dim(F)$)

Attention : C'est faux pour un endomorphisme en dimension quelconque. c/ex : $P \mapsto XP$ et $P \mapsto P'$ sur $\mathbb{K}[X]$.

Propriété **[III.4] :** Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$

2. si f est un isomorphisme de E sur F alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$.

3. si g est un isomorphisme de F sur G alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$

Remarque(s) :

III.4 On a en fait utilisé $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$

Exemple(s) :

III.5 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $r \leqslant \min(n, p)$ et $J_r = \sum_{i=1}^{r} E_{i,i} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer l'équivalence de

i. $\mathrm{rg}(A) = r$.

ii. il existe $(P, Q) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $A = PJ_rQ^{-1}$.