TD3 : Espaces préhilbertiens

Exercice 1 (CCINP PSI 2019)

1. Montrer que $< f, g >= \int_{-1}^{1} u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$.

2. On pose $F = \{u \in E, \forall x \in [0,1], u(x) = 0\}$ et $G = \{u \in E, \forall x \in [-1,0], u(x) = 0\}$. Montrer que $F \perp G$. F et G sont-ils supplémentaires ?

3. Justifier $G \subset F^{\perp}$.

4. On veut montrer que $G = F^{\perp}$: pour $g \in F^{\perp}$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \\ g(0) & \text{si } x \in [-1,-1/n] \\ \text{affine} & \text{sur } [-1/n, 0] \end{cases}$; calculer $< f_n, g >$ et montrer que $g(0)\int_{-1}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Conclure en utilisant f nulle sur $[0,1]$ et $f(x) = g(x) - g(0)$ sur $[-1,0]$.

Exercice 2 (CCINP PSI 2021)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et f canoniquement associé ; on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique.

1. Montrer que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, (x|f(y)) = -(f(x)|y)$

2. Montrer que $\det(f) = (-1)^n \det(f)$. Qu'en déduit-on ?

3. Montrer que f induit sur $\mathrm{Im}(f)$ un endomorphisme injectif. Que peut-on en déduire sur $\dim(\mathrm{Im}(f))$?

4. On suppose $n = 3$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (CCINP PSI 2022)

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E, espace préhilbertien, telle que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)^2$

1. Montrer que, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\|e_i\| \leqslant 1$.

2. Soit x un vecteur unitaire et orthogonal à $\mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$. Calculer $(x|e_n)^2$ et en déduire $\|e_n\|$.
indication : Cauchy-Schwarz

3. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 4 (CCINP PSI 2019)

1. Montrer que $< P, Q >= \int_{0}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

3. Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{0}^{1} (t^2 - at + b)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 (CCP PSI 2022)

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la famille $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ pour que $\phi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Dans ce cas, calculer la distance de X^n à $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$.
indication : commencer par définir F à l'aide d'un produit scalaire.

Exercice 6 (CCP PSI 2018)

Pour $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\varphi(M,N) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j} n_{i,j}$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On pose $H = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j} = 0 \right\}$. Calculer $d = \inf\limits_{M\in H} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.
indication : déterminer un vecteur normal à H (après avoir justifié que c'est un hyperplan)

Exercice 7 (CCINP PSI 2022)

1. Montrer que $(X|Y) = X^T Y$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que $(\mathrm{Im}\,A)^{\perp} = \ker(A^T)$

3. Pour $Y \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(X) = \|AX - Y\|$ avec $Y \in \mathbb{R}^n$ fixé. Montrer que $f(X_0) = \inf\limits_{X\in\mathbb{R}^n} f(X)$ si et seulement si $A^T(AX_0 - Y) = 0$ et l'existence d'un tel X_0.