TD4 : Espaces préhilbertiens

Exercice 1

Montrer que $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2 (CCP PSI 2009)

Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien, muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ trouver une base orthonormale de H engendré par $a = e_1 + e_2 + e_3$ et $b = e_1 - e_4$. Donner la matrice dans B de la projection orthogonale sur H.

Exercice 3 (Mines-Ponts PSI 2018)

On pose $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X], \int_0^1 (t^3 - t)P'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 tP(t)\,\mathrm{d}t \right\}$ et on munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Calculer $d(Q, F)$ avec $Q = 1 + X + X^2 + X^3$.
   indication : trouver un vecteur normal à F (qui est un hyperplan)

Exercice 4

Soit E un espace euclidiens de dimension n et $(u_1, \ldots, u_{n+2}) \in E^{n+2}$. Montrer par récurrence sur n qu'il existe $(i, j) \in [\![1, n+2]\!]$ tel que $(x_i|x_j) \geqslant 0$.
indication : considérer les projetés orthogonaux des x_i sur $\{x_{n+2}\}^\perp$.