# TD5 : Intégration

---

**Exercice 1** **(CCP PSI 2007)**

**1.** Montrer que $u$ défini par $u(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
*indication : pour montrer que $u(f)$ est continue, utiliser la linéarité de l'intégrale.*

**2.** Calculer $u(f)(0)$.

**3.** Trouver les fonctions $f$ telles que $u(f)$ soit constant.
*indication : vérifier que $u(f)$ est dérivable.*

**4.** Résoudre $u(f) = \lambda f$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
*indication : vérifier que si $\lambda \neq 0$ alors une solution $f$ est forcément dérivable.*

**Exercice 2**

Justifier la convergence de $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, $I_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^3+\sqrt{t}-1}$ et $I_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}(t)}$.

**Exercice 3**

**1.** Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^3}\,\mathrm{d}t$.

**2.** Calculer $I$, sachant que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

**Exercice 4**

**1.** Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.
*indication : la fonction est prolongeable par continuité en* $0$.

**2.** En déduire l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$
*indication : IPP*

**3.** On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $(v_n)$ est constante
*indication :* $\sin(p) - \sin(q) = ?$

b) puis que $(u_n - v_n)$ tend vers $0$
*indication : montrer que $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.*

**4.** En déduire la valeur de $I$.

**Exercice 5** **(Mines-Ponts PSI 2022)**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

**1.** Montrer que $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et préciser $f'$.

**2.** Déterminer des équivalents de $f$ en $0$ et $+\infty$.
*indication : pour l'équivalent en $+\infty$, qui est $\dfrac{e^{-x}}{x}$, commencer par une IPP.*

**3.** Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et calculer cette intégrale.