Révisions et compléments d'algèbre linéaire

La notation $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes.

I Produit et somme de sous-espaces vectoriels

1. Produit de sous-espaces vectoriels

Définition **[I.1] :** Soient $E_1, \ldots, E_p$ des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ et $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$. On définit une loi de composition interne sur E notée $+$ par

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) + (y_1, y_2, \ldots, y_p) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_p + y_p)$$

et une loi de composition externe par

$$\lambda.(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (\lambda.x_1, \lambda.x_2, \ldots, \lambda.x_p)$$

L'ensemble E, muni de ces deux lois, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel appelé **espace produit** de E_1, E_2, ..., E_p.

Remarque(s) :

I.1 Le vecteur nul de E est alors $0_E = (0_{E_1}, 0_{E_2}, \ldots, 0_{E_p})$.

I.2 On retrouve ainsi la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Propriété **[I.2] :** Si $E_1, \ldots, E_p$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies alors l'espace produit $\prod_{i=1}^{p} E_i$ est de dimension finie et

$$\dim\left(\prod_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$$

Remarque(s) :

I.3 On retrouve ainsi $\dim(\mathbb{K}^p) = p$.

I.4 Si $(e_{i,k})_{1 \leqslant k \leqslant n_i}$ est une base de E_i alors une base de $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$ est $(u_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ avec $n = n_1 + \cdots + n_p$ et $u_j = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{\substack{i-1 \\ \text{coord}}}, \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{ème}}}}{e_{i,j-(n_1+\cdots+n_{i-1})}}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\substack{p-i \\ \text{coord}}})$ si $n_1 + \cdots + n_{i-1} < j \leqslant n_1 + \cdots + n_{i-1} + n_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$.

2. Sous-espaces supplémentaires

Définition : Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on dit que F et G sont supplémentaires (dans E) si

$$F \cap G = \{0\} \text{ et } E = F + G$$

On le note $E = F \oplus G$

Propriété [I.3] :

1. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $E = F \oplus G$ si et seulement si

$$\forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times G, x = y + z$$

2. Si E est un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i. $E = F \oplus G$

ii. $F \cap G = \{0\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.

iii. $F + G = E$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.

Exemple(s) :

(I.5) Si $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$ alors $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

(I.6) $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ (matrices symétriques et antisymétriques)

(I.7) Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(P) = n + 1$ alors $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_n[X] \oplus P\mathbb{K}[X]$

(I.8) Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $p \leqslant n$ tel que $E = \ker(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)$ et étudier les endomorphismes induits par f sur ces deux sous-espaces.

Matrices par blocs :
si $E = E_1 \oplus E_2$ et $F = F_1 \oplus F_2$, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ une base adaptée à la décomposition de E et $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2)$ une base adaptée à la décomposition de F.
Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ avec $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n_i,p_j}(\mathbb{K})$ si $p_j = \dim(E_j)$ et $n_i = \dim(F_i)$.
Si on note π_1 (resp. π_2) le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 (resp. sur F_2 parallèlement à F_1), alors A_{ij} est la matrice de l'application $f_{ij} : \begin{array}{ccc} E_j & \to & F_i \\ x & \mapsto & \pi_i(f(x)) \end{array}$.
Produit de matrices par blocs : si $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ avec $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n_ip_j}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ avec $B_{jk} \in \mathcal{M}_{p_jq_k}(\mathbb{K})$ alors on a $AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$

Opérations élémentaires sur les matrices :
On définit les matrices élémentaires de$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la façon suivante :

— Pour $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ d'inverse $T_{i,j}(-\lambda)$ (matrice de transvection)
— Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ d'inverse $D_i(1/\lambda)$ (matrice de dilatation)
— Pour $i \neq j$, $P_{i,j} = I_n - (E_{i,i} + E_{j,j}) + (E_{i,j} + E_{j,i})$ d'inverse $P_{i,j}$ (matrice de transposition)

La multiplication d'une matrice A à gauche (resp. à droite) par une de ces matrices a un effet sur les lignes (resp. les colonnes) de A :

matrice $M =$	$T_{i,j}(\lambda)$	$D_i(\lambda)$	$P_{i,j}$
effet du produit par M à **gauche** sur les **lignes** de A	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$L_i \leftrightarrow L_j$
effet du produit par M à **droite** sur les **colonnes** de A	$C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$	$C_i \leftarrow \lambda C_i$	$C_i \leftrightarrow C_j$

Exemple(s) :

(I.9) On peut faire de même des « opérations par blocs » :
si A est inversible, montrer que $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(D - CA^{-1}B)$

3. Somme directe de p sous-espaces vectoriels

Définition : Soient $E_1, \dots, E_p$ p sous-espaces vectoriels de E. On note $E_1 + \cdots + E_p = \sum_{k=1}^{p} E_k$ la **somme** des sous-espaces $E_1, \dots, E_p$ définie par

$$\sum_{k=1}^{p} E_k = \{x \in E, \exists (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, x = x_1 + \cdots + x_p\}$$

Remarque(s) :

(I.10) $\sum_{k=1}^{p} E_k = \text{Vect}\left(\bigcup_{k=1}^{p} E_k\right)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (pour l'inclusion) contenant tous les E_k.

Définition : Si $E_1, \dots, E_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E tels que

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, x_1 + \cdots + x_p = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_p = 0$$

on dit que la somme de E_k est **directe** ; on la note alors $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$

Attention : La somme des E_k est directe n'est pas équivalente à $E_i \cap E_j = \{0\}$ pour $i \neq j$. c/ex : trois droites 2 à 2 distinctes de $\mathbb{R}^3$.

Exemple(s) :

(I.11) Soient $E_k = \{x \mapsto P(x)e^{kx}, P \in \mathbb{K}[X]\}$, pour $k = 0, 1, 2$. Montrer que E_0, E_1 et E_2 sont en somme directe.

Propriété [I.4] : Soient $E_1, \dots, E_p$ p sous-espaces vectoriels de E. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i. la somme des E_k est directe.

ii. $\forall x \in \sum_{k=1}^{p} E_k, \exists! (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^{p} E_k, x = x_1 + \cdots + x_p$

Exemple(s) :

(I.12) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \ker(f - id_E) \oplus \ker(f + id_E)$.

Propriété [I.5] : (bases, dimensions et sommes directes)

1. Si $E_1, \dots, E_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies et en somme directe alors $F = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$ est de dimension finie et

$$\dim F = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k)$$

de plus, si $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ sont des bases respectives de $E_1, \dots, E_p$ alors $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est une base de F appelée **base adaptée à la décomposition**

2. Si E est de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, si $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ sont des parties de $\mathcal{B}$ (non vides) telles que $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ et $i \neq j \Rightarrow \mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$ et si on note $E_i = \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$ alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

3. Soient $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E. Alors

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$$

4. Soient $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E, espace de dimension finie. Alors on a équivalence de :

i. $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

ii. Les $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sont en somme directe <u>et</u> $\dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$.

iii. $E = \sum_{i=1}^{p} E_i$ <u>et</u> $\dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$.

<u>Exemple(s) :</u>

(I.13) Soient $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(X) = P(-X)\}$. Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = E \oplus F \oplus G$ et déterminer une base $\mathbb{R}_3[X]$ adaptée à cette décompositon.

(I.14) Soit E un espace vectoriel de dimension n, $(f_1, \dots, f_p) \in \mathcal{L}(E)^p$ tels que $f_1 + \dots + f_p = id_E$ et $\sum_{k=1}^{p} \mathrm{rg}(f_i) \leqslant n$.

a) Montrer que $E = \mathrm{Im}(f_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Im}(f_p)$.

b) Montrer que $f_1, \dots, f_p$ sont des projecteurs et $i \neq j \Rightarrow f_i \circ f_j = 0$.

II Applications linéaires

1. Applications linéaires et sommes directes

<u>Propriété</u> [II.1] : Soient E et F deux espaces vectoriels, $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$ et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$. Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\forall i \in [\![1, p]\!], u_{|E_i} = u_i$$

<u>Remarque(s) :</u>

(II.1) Si $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ et $\mathcal{B}'$ une base de F alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p \end{pmatrix}$ où $A_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i,\mathcal{B}'}(u_i)$

Si $x \in E$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u(x)) = AX = \begin{pmatrix} A_1X_1 + \dots + A_pX_p \end{pmatrix}$.

<u>Exemple(s) :</u>

(II.2) Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note p_i l'endomorphisme de E tel que $p_{i|E_i} = id_{|E_i}$ et $p_{i|E_k} = 0$ si $i \neq k$. Alors p_i est le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$.

De plus on a $\sum_{k=1}^{n} p_k = id_E$ et $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0$

2. Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition : Soient F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que F est **stable par** f si $f(F) \subset F$, ie

$$\forall x \in F, f(x) \in F.$$

Dans ce cas, la restiction de f à F **induit** un endomorphisme de F défini par $\widetilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$

Exemple(s) :

(II.3) Si E est un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que toute droite de E est stable par f alors f est une homothétie.

Propriété [II.2] : Si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent ($u \circ v = v \circ u$) alors

$$\ker(u) \text{ et } \mathrm{Im}(u) \text{ sont stables par } v.$$

Exemple(s) :

(II.4) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E. Montrer que $u \circ p = p \circ u$ si et seulement si $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u.

Propriété [II.3] : Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E telle que $\mathcal{B}_F = (e_1, \ldots, e_p)$ soit une base de F. On a équivalence de :

i. F est stable par f

ii. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est triangulaire par blocs.

$A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est alors la matrice dans la base $\mathcal{B}_F$ de l'endomorphisme de F induit par f.

Conséquence [II.4] : Si $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} E_k$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ alors tous les E_i sont stables par f si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale par blocs dans toute base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition

Exemple(s) :

(II.5) Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}\{e_i\}$ est stable par u.

(II.6) Avec les mêmes notations, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_i\}$ est stable par u.

(II.7) Si A est triangulaire supérieure et inversible alors A^{-1} est aussi triangulaire supérieure.

3. Polynômes d'endomorphisme et de matrice carrée

Définition :

1. Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $u^k = \left\{ \begin{array}{ll} id_E & \text{si } k = 0 \\ u \circ u^{k-1} & \text{si } k \geqslant 1 \end{array} \right.$

Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit l'endomorphisme $P(u)$ par

$$P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k = a_d u^d + a_{d-1} u^{d-1} + \cdots + a_1 u + a_0 id_E$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $A^k = \begin{cases} I_n & \text{si } k = 0 \\ A \times A^{k-1} & \text{si } k \geqslant 1 \end{cases}$

Si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit <u>la matrice</u> $P(A)$ par

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = a_d A^d + a_{d-1} A^{d-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$$

<u>Attention</u> :
- *$P(u)$ n'a de sens que si u est un endomorphisme, $P(A)$ seulement si A est une matrice carrée.*
- *Ne pas oublier de rajouter id_E (ou I_n) : $u + 1$ n'a aucun sens si $u \in \mathcal{L}(E)$.*

<u>Propriété</u> [II.5] : (Règles de calcul sur les polynômes d'endomorphisme et polynômes de matrice)

1. Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{cases} \forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, (\alpha P + \beta Q)(u) = \alpha P(u) + \beta Q(u) \\ \forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) \\ P(u) = id_E \text{ si } P = 1 \end{cases}$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{cases} \forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, (\alpha P + \beta Q)(A) = \alpha P(A) + \beta Q(A) \\ \forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, (PQ)(A) = P(A) \times Q(A) \\ P(A) = I_n \text{ si } P = 1 \end{cases}$$

<u>Attention</u> : *On $P(u)(x) \neq P(u(x))$: la notation $P(u(x))$ (ou $P(AX)$) n'a aucun sens !*

<u>Conséquence</u> [II.6] :

1. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathbb{K}[u] = \{v \in \mathcal{L}(E), \exists P \in \mathbb{K}[X], v = P(u)\}$ (l'ensemble des polynômes en u) est un sous-espace vectoriel, stable par composition, de $\mathcal{L}(E)$ sur lequel la composition est commutative.
   En particulier $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(u) \circ u = u \circ P(u)$.
2. Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, $\ker(P(u))$ et $\operatorname{Im}(P(u))$ sont des sous-espaces vectoriels de E stables par u.

<u>Remarque(s) :</u>

II.8 Soient E est un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors $P(A) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u))$.
Inversement, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si u est l'endomorphisme canoniquement associé à A, alors $P(u)$ est l'endomorphisme canoniquement associé à $P(A)$.

<u>Propriété</u> [II.7] : Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles qu'il existe $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $B = Q^{-1}AQ$. Alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$P(B) = Q^{-1} P(A) Q.$$

On en déduit en particulier que $P(A)$ et $P(B)$ sont elles aussi semblables.

Définition :

1. Soient E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est **un polynôme annulateur de** u si

$$P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est **un polynôme annulateur de** A si

$$P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

Remarque(s) :

II.9 Si P et Q sont deux polynômes annulateurs de A (ou de u) et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ alors $\alpha P + \beta Q$ est aussi un polynôme annulateur de A (ou de u).
Si R est un polynôme quelconque alors PR est annulateur de A (ou de u).
S'il existe un polynôme annulateur non nul de u, il n'est jamais unique !

II.10 Il existe un polynôme annulateur de A de degré p si et seulement si la famille $(I_n, A, \dots, A^p)$ est liée.
Chercher un polynôme annulateur de A est donc équivalent à chercher une relation de liaison sur les puissances de A.

Propriété [II.8] :

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un polynôme annulateur non nul de u.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe un polynôme annulateur non nul de A.

Exemple(s) :

II.11 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur non nul de A et $p = \deg(P)$. Alors $\mathbb{K}[A] = \mathrm{Vect}\left\{I_n, A, \dots, A^{p-1}\right\}$

II.12 Utilisation d'un polynôme annulateur pour calculer l'inverse d'une matrice (ou d'un endomorphisme) : si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$ est un polynôme annulateur de A tel que $a_0 = P(0) \neq 0$ alors A est inversible et A^{-1} est un polynôme en A.
Application à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i = j \\ \beta & \text{sinon} \end{cases}$

II.13 Utilisation d'un polynôme annulateur pour calculer les puissances d'une matrice (ou d'un endomorphisme) : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P = X(X-1)(X-2)$ soit annulateur de A ; calculer A^p (pour $p \in \mathbb{N}$). Même question avec A annulée par $P = (X-1)^2(X-2)$.

II.14 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(I_2 + \frac{1}{n} A\right)^n$.

Remarque(s) :

II.15 Si A est inversible, il existe des polynômes annulateurs de A qui s'annulent en 0 ; ex : $X^2 - X$ est annulateur de I_n.

II.16 On peut utiliser un polynôme annulateur de A pour calculer $Q(A)$ avec Q un polynôme quelconque (et pas seulement $Q = X^p$).

III Formes linéaires et hyperplans

1. Hyperplans dans un espace vectoriel de dimension finie

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E vers $\mathbb{K}$.

Remarque(s) :

III.1 Si E est un espace vectoriel de de dimension finie p, f une forme linéaire sur E et $\mathcal{B}$ une base de E alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ (matrice ligne).

Exemple(s) :

(*III.2*) Soit e un vecteur non nul de E, espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(e) = 1$.

Définition [III.1] : Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un **hyperplan** de E s'il vérifie une des trois propriétés équivalentes (donc les trois) suivantes :

i. Il existe une droite D de E telle que $E = H \oplus D$.
ii. Il existe une forme linéaire non nulle φ sur E telle que $H = \ker(\varphi)$.
iii. $\dim(H) = n - 1$

Exemple(s) :

(*III.3*) Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites ; les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les plans.

(*III.4*) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - 2z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

(*III.5*) $\{P \in \mathbb{K}[X], P(0) + P''(1) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$.

Propriété [III.2] : Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et H un hyperplan de E. Il existe $a_1, \dots, a_n$ des scalaires non tous nuls tels que

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in H \text{ si et seulement si } a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

L'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ est une **équation cartésienne de H dans la base $\mathcal{B}$**. Une telle équation est unique à une constante multiplicative près.

Remarque(s) :

(*III.6*) On retrouve les équations cartésiennes des droites dans $\mathbb{R}^2$ et des plans dans $\mathbb{R}^3$.

(*III.7*) On a en fait prouvé que si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E alors $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$ si et seulement si il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

2. Trace d'une matrice carrée et d'un endomorphisme

Définition : Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit sa **trace**, notée $\mathrm{Tr}(A)$, par $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Propriété [III.3] :

1. Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ie $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \mathrm{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \,\mathrm{Tr}(A) + \beta \,\mathrm{Tr}(B)$
2. $\forall(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
3. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^T)$

Attention : $\mathrm{Tr}(AB) \neq \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$ *et* $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA) = \mathrm{Tr}(CAB) \neq \mathrm{Tr}(ACB)$ *; c/ex :* $A = C^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Conséquence [III.4] : Si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

Attention : La réciproque est fausse ; c/ex $A = I_2$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *ont la même trace mais ne sont pas semblables.*

Définition [III.5] **:** Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **trace** de f la trace de toute matrice de f dans une base de E : $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)$ pour toute base $\mathcal{B}$ de E.

Attention : La trace n'est définie que pour un endomorphisme en dimension finie : la trace de l'application linéaire $P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto (P(0), \ldots, P(n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ n'existe pas.

Conséquence [III.6] **:** Si f et g sont deux endomorphismes de E, espace vectoriel de dimension finie, alors on a :

1. $\mathrm{Tr}(\alpha f + \beta g) = \alpha \,\mathrm{Tr}(f) + \beta \,\mathrm{Tr}(g)$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
2. $\mathrm{Tr}(g \circ f) = \mathrm{Tr}(f \circ g)$.

Exemple(s) :

III.8 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E. Alors on a $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.
La réciproque est fausse ; c/ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice telle que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{rg}(A)$ mais $A^2 \neq A$.

IV Déterminants

1. Propriétés des déterminants

Définition :

1. Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Le **déterminant dans la base** $\mathcal{B}$ est l'unique application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que
   - $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables.
   - $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ s'il existe $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$.
   - $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$
2. **Déterminant d'une matrice carrée :** det est l'unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$ telle que
   - $(C_1, \ldots, C_n) \mapsto \det(C_1, \ldots, C_n)$ est linéaire par rapport à chacune des colonnes C_j.
   - $\det(C_1, \ldots, C_n) = 0$ s'il existe $i \neq j$ tels que $C_i = C_j$.
   - $\det(I_n) = 1$.

Propriété [IV.1] **:**

1. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
2. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
   Si A est inversible alors $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
4. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det\left(A^T\right) = \det(A)$.

Attention : Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on a $\det(AB) = \det(BA)$. Ce résultat n'est pas valable pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Conséquence [IV.2] **:** Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ et $\mathcal{B}$ est une base de E quelconque. Alors

$$(u_1, \ldots, u_n) \text{ est une base de } E \text{ si et seulement si } \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) \neq 0,$$

Définition [IV.3] **:** Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$, le **déterminant de** f, noté $\det(f)$ est défini par

$$\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$$

Ce scalaire est indépendant de la base $\mathcal{B}$ de E.

Exemple(s) :

IV.1 Si F et G sont deux espaces supplémentaires de E, espace vectoriel de dimension finie, et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G alors $\det(s) = (-1)^{\dim(G)}$.

Attention : Le déterminant n'est défini que pour un endomorphisme en dimension finie : l'application linéaire $P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto (P(0), \dots, P(n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ n'a pas de déterminant.

Propriété [IV.4] **:** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. $\forall f \in \mathcal{L}(E), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$

2. $\forall (f,g) \in \mathcal{L}(E)^2, \det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.

3. $\forall f \in \mathcal{L}(E), \det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f \in \mathcal{GL}(E)$ et si $f \in \mathcal{GL}(E), \det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$

Attention : On a en particulier $\det(f \circ g) = \det(g \circ f)$ si f et g sont deux endomorphismes de E ; ce n'est pas valable pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$.

2. Calculs de déterminants

Rappels :

- Un déterminant est nul si et seulement si ses lignes (ou colonnes) sont liées.
- Si on échange deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant, on le multiplie par -1.
- On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une ligne (resp. une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes).
- Si on mulitplie une ligne (ou une colonne) d'un déterminant par $\lambda \in \mathbb{K}$, on multiplie le déterminant par λ.

Propriété [IV.5] **:** Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(h,k) \in [\![1,n]\!]^2$. Pour $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $\Delta_{p,q}$, le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant la $p^{\text{ème}}$ ligne et la $q^{\text{ème}}$ colonne :

$$\Delta_{p,q} = \det\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq p \text{ et } j \neq q}}$$

1. (Développement suivant la $h^{\text{ème}}$ ligne) : $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{h,j} \Delta_{h,j}$

2. (Développement suivant la $k^{\text{ème}}$ colonne) : $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} \Delta_{i,k}$

Conséquence [IV.6] **:** Si $A = (a_{i,k})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire alors $\det(A) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$

Propriété [IV.7] **: (Déterminant de Vandermonde)**
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On a

$$\det\left(x_i^{j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

Propriété [IV.8] : (Interpolation de Lagrange)
Soient $n+1$ scalaires 2 à 2 distincts, $a_0, \dots, a_n$. Alors

1. L'application $\varphi : P(X) \in \mathbb{K}_n[X] \longmapsto (P(a_0), \dots, P(a_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.
2. Si $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0, n+1]\!]\,, P(a_i) = y_i$.
3. Si on définit $L_k(X) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \dfrac{X - a_j}{a_k - a_j}$, pour $k \in [\![0, n]\!]$, la famille $\mathcal{B}_L = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée **famille des polynômes interpolateurs de Lagrange aux points** $a_0, \dots, a_n$.
De plus $L_k(a_i) = \delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a
$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) L_k(X)$$
ie les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}_L$ sont $(P(a_0), \dots, P(a_n))$
5. On a en particulier $1 = \sum_{k=0}^{n} L_k(X)$
6. L'unique polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0, n]\!]\,, P(a_i) = y_i$ est $P(X) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(X)$.

Remarque(s) :

IV.2 Lien entre l'interpolation de Lagrange et les déterminants de Vandermonde : si $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont $n+1$ scalaires deux à deux distincts, le déterminant du système $\forall i \in [\![0, n]\!]\; P(\alpha_i) = y_i$ où les inconnues sont les $n+1$ coefficients du polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ est un déterminant de Vandermonde

Exemple(s) :

IV.3 Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels et $P_k = (X + a_k)^n$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

Propriété [IV.9] : (Matrices triangulaires par blocs)
Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ (carrée), $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ (carrée) et $B \in \mathcal{M}_{p,n-k}(\mathbb{K})$. Alors on a

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(C)$$

Remarque(s) :

IV.4 On aussi $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(C)$ si A et C sont carrées.