TD6 : Intégration

Exercice 1

1. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$
2. La fonction $t \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{t}\right)\ln t}{\sqrt{t}-\sin t}$ est-elle intégrable sur $]0,1]$?
3. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t^2-t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
4. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$
   a) On suppose $\beta>0$. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t^\beta}\,\mathrm{d}t$.
   b) Toujours avec $\beta>0$, déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha e^{-t^\beta}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^\beta}\,\mathrm{d}t$ en fonction de $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta>0$.
   c) Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^\beta}\,\mathrm{d}t$ dans les cas $\beta<0$ et $\beta=0$.

Exercice 2 (Mines-Télécom PSI 2019)

Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$

Exercice 3 (CCP PSI 2018)

Déterminer la nature des deux intégrales suivantes : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 4

Soit f continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ telle que $t\mapsto f(t)e^{-\alpha t}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction g_n définie par $g_n(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $]\alpha,+\infty[$.

indication : quelle fonction utiliser pour appliquer le théorème de comparaison ?

Exercice 5

Justifier la convergence de $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left|x-\frac{1}{x}\right|\right)\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur.

indication : couper l'intégrale en 2 (en quel point ?) et faire des changements de variable.

Exercice 6 (CCP PSI 2013)

Pour $t>0$, on pose $f(t)=\dfrac{1}{t+\cos(t)}$ et, pour $x>0$, $g(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que, pour $x>0$, $\displaystyle\int_0^x g(t)^2\,\mathrm{d}t = 2\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - xg(x)^2$.
3. En déduire que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. *indication : commencer par vérifier que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz*