TD7 : Algèbre linéaire

Exercice 1
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(A) \oplus \ker(A - 2I_3) \oplus \ker(A + 2I_3)$.

Exercice 2 **(CCINP PSI 2022)**
Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$ pour un entier $p \geqslant 1$.

1. Existe-t-il $k \leqslant p$ tel que $f^k = 0$?

2. Montrer qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ soit libre. En déduire $p \leqslant n$.
Que vaut f^n ?

3. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = g^2$, montrer que $2p - 1 \leqslant n$

Exercice 3 **(CCINP PSI 2019)**
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\ker(A^2)$ et $\ker(A - 2I_3)$ sont en somme directe

2. Trouver un vecteur de $\ker(A^2)$ qui n'appartient pas à $\ker(A)$ puis montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que si $B^2 = A$ alors $\ker(A^2)$ est stable par B ; que peut-on en déduire ?
indication : pensez à la conclusion de l'exercice 2.

Exercice 4 **(CCINP PSI 2021)**
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + id)$ et $\ker(f^2 + id) \neq \{0\}$

2. Soit $x \in \ker(f^2 + id)$ non nul, montrer que $(x, f(x))$ est libre

3. Déterminer les dimensions de $\ker(f^2 + id)$ et $\ker(f)$.

4. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Trouver les $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f = u^2$?
indication : chercher des espaces stables par u pour simplifier la forme de la matrice de u avant d'introduire ses coefficients.

Exercice 5 **(Mines-Ponts PSI 2022)**
Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^n pour $n \geqslant 1$.
indiction : écrire $M = I_3 + N$ et vérifier N nilpotente

2. Déterminer une base de $F = \mathrm{Vect}\{M^n, n \geqslant 1\}$.

3. Montrer que le commutant de M est exactement F.

Exercice 6 **(Mines-Télécom PSI 2019)**
Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$. On suppose $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$

1. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(v)$

2. Montrer que si E et F sont de dimension finies alors $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(v)$